МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
Естественнонаучный институт, Физический факультет
Кафедра общей и теоретической физики

На правах рукописи

Григорьев Алексей Дмитриевич

Поверхностные состояния атомов гелия и нейтронов над жидким гелием

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.07 "физика конденсированного состояния"

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Александр Федорович Крутов

Самара 2016

Оглавление

Аннотация **5**

1 Введение **8**

1.1 Актуальность проблемы 8

1.2 Цель диссертационной работы 9

1.3 Научная новизна 11

1.4 Достоверность полученных результатов 11

1.5 Научная и практическая значимость результатов 12

1.6 Основные результаты 12

1.7 Апробация работы и публикации 14

1.8 Обзор достижений в данной области и мотивация исследований 15

2 Оценка энергии активации сюрфона и его эффективной массы **23**

2.1 Энергия активации сюрфонов над идеальной плоской поверхностью 24

2.2 Образование лунки и ее влияние на энергию активации сюрфонов и их эффективную массу 25

3 Температурная зависимость поверхностного натяжения в жидком гелии и определение параметров сюрфонов из эксперимента. **29**

4 Взаимодействие сюрфонов с риплонами **39**

4.1 Волновые функции сюрфонов и атомов пара 43

4.2 Вычисление матричных элементов сюрфон-риплонного взаимодействия . . . 46

4.3 Оценка времени испарения сюрфона 48

4.4 Обсуждение свойств сюрфонов и их сравнение с численными расчетами . . 52

5 Нейтроны на поверхности жидкого гелия **55**
5.1 Введение . . . 55
5.2 Нейтроны над плоской поверхностью гелия. . . . 56
5.3 Рассеяние нейтронов в связанных поверхностных состояниях на атомах пара гелия. . . . 59
5.3.1 Матричные элементы . . . 60
5.3.2 Скорость рассеяния на атомах пара . . . 62
5.4 Рассеяние нейтронов на поверхностных волнах . . . 63
5.4.1 Общая информация о риплонах. . . . 63
5.4.2 Гамильтониан взаимодействия . . . 64
5.4.3 Кроссовер между адиабатическим и диабатическим пределами и матричные элементы . . . 65
5.4.4 Поглощение риплонов . . . 67
5.4.5 Испускание риплонов . . . 69
5.5 Другие процессы рассеяния нейтрона . . . 71
5.5.1 Рассеяние поверхностных нейтронов на фононах из обьёма жидкости 71
5.5.2 Рассеяние на сюрфонах . . . 72
5.6 Обсуждение и эскизы экспериментальных реализаций . . . 73

Заключение **80**
Выводы . . . 83

Приложения **84**

A Неидеальный газ сюрфонов **84**

B Вывод нейтрон-риплонного взаимодействия в адиабатическом приближении **88**

C Кроссовер между адиабатическим и диабатическим пределами в классической физике **90**

D Расчеты для скорости рассеяния нейтронов на риплонах **93**
D.1 Поглощение тепловых (высокоэнергетических) риплонов . . . 94
D.2 Верхняя оценка скорости поглощения низкоэнергетических риплонов . . . 96
D.2.1 Переходы в непрерывный спектр нейтронов . . . 96

D.2.2 Переходы нейтронов на дискретные уровни 97

E Рассеяние нейтронов на сюрфонах **99**

E.1 Матричный элемент 99

E.2 Скорость рассеяния на сюрфоне 100

Литература **103**

Аннотация

В диссертации теоретически исследуются квантовые состояния атомов гелия и нейтронов на поверхности жидкого гелия. В первой части работы проводится теоретическое исследование относительно нового вида возбуждений на поверхности жидкостей при низкой температуре. Этот тип поверхностных возбуждений был впервые получен в качестве дополнения к риплонам (квантам поверхностных волн) в численных расчетах возбуждений вблизи границы жидкого гелия и его пара[24]. Более наглядная феноменологическая модель этих возбуждений, предложенная в [15], показала что они вносят существенный вклад в термодинамику поверхности. Эти возбуждения, названные сюрфонами, возникают, потому что атомы гелия имеют дискретный квантовый уровень вблизи поверхности. В направлении, перпендикулярном поверхности, атомы притягиваются к поверхности жидкости силами Ван дер Ваальса, но вблизи самой поверхности отталкиваются на расстоянии порядка размера атома. Другими словами, сюрфоны представляет собой суперпозицию волновых функций атомов пара, которая имеет резкий максимум вблизи поверхности (на расстоянии примерно 0.5nm выше нее) и энергию ниже, чем атомы гелия в вакууме из-за притяжения Ван дер Ваальса к поверхности. Концентрация сюрфонов увеличивается с температурой, поскольку рождение сюрфонов есть термически-активационный процесс, определяемый их энергией активации, равной разнице между энергией сюрфона и химическим потенциалом в объеме жидкости и зависящей от изотопа гелия. Сюрфоны могут двигаться вдоль поверхности и образуют двумерный газ. Задачами предлагаемого исследования является построение микроскопической модели данного вида возбуждений, исследование его структуры и свойств, а также изучения влияния этого нового типа возбуждений на физические свойства поверхности жидкого гелия. В первой главе диссертации приведено подробное введение в проблему. Описаны загадки, связанные с недопониманием микроскопической структуры поверхности гелия. Приведены различные экспериментальные наблюдения, которые нельзя объяснить на основе традиционного понимания структуры поверхности жидкости без учета дополнительного типа возбуждений. Во второй главе диссертации предложена приближенная микроскопическая модель структуры сюрфонов без учёта их взаимодействия между собой. На основе этой модели, вычислена энергия активации сюрфонов и дана оценка их эффективной массы для обоих изотопов гелия. Полученная энергия сюрфона для обоих изотопов жидкого гелия выше химического потенциала жидкости, но ниже энергии атома гелия в вакууме. Это

доказывает существование сюрфонов и позволяет их считать возбуждением на поверхности жидкости. В третьей главе диссертации вычислен вклад сюрфонов в температурную зависимость коэффициента поверхностного натяжения обоих изотопов жидкого гелия. Этот расчет учитывает температурную зависимость плотности и химического потенциала жидкого гелия, которые входят в коэффициент поверхностного натяжения через энергию активации сюрфонов. Сравнение с экспериментом позволяет получить феноменологические значения энергии активации и эффективной массы сюрфона. При этом полученное значение энергии активации сюрфона (около 0.25meV для гелия 4 и около 0.025meV для гелия 3) оказалось очень близко к теоретической оценке, полученной в главе 2 из микроскопической модели сюрфонов, а эффективная масса сюрфонов для их движения вдоль поверхности оказалась больше массы свободного атома гелия приблизительно в два раза. Это увеличение эффективной массы поверхностных уровней атомов гелия (сюрфонов) можно объяснить даже без учёта взаимодействия между сюрфонами, поскольку сюрфон создает локальную деформацию поверхности жидкости, которая сопровождает его при движении вдоль поверхности. Полученное согласие между теорией и экспериментом позволяет считать сюрфоны новым типом квазичастиц на поверхности жидкостей, существенно влияющим на физические свойства поверхности жидкостей при низкой температуре. В четвёртом разделе получена верхняя оценка времени жизни сюрфона по основному каналу распада - испарению с поверхности из-за поглощения риплона. При этом время жизни сюрфонов оказывается значительно больше периода его квантовых колебаний (постоянной Планка деленной на энергию сюрфона), что еще раз доказывает что сюрфоны можно считать квазичастицами. В пятом разделе вычислен вклад взаимодействия между сюрфонами в температурную зависимость коэффициента поверхностного натяжения чистых изотопов жидкого гелия в приближении парного взаимодействия в рамках классической механики. Для жидкого гелия эта поправка оказалась лишь в два раза меньше общего вклада сюрфонного газа. Поскольку взаимодействие между атомами гелия меньше чем между атомами или молекулами любого другого вещества, это означает необходимость более точного расчёта сюрфон-сюрфонного взаимодействия при учёте любых эффектов, связанных с наличием этого типа возбуждений. Например, квантовый расчет вклада взаимодействия между сюрфонами дает меньшую поправку. Учёт парного взаимодействия между сюрфонами полностью освобождает данную модель от подгоночных параметров (энергия активации сюрфона строго равна теоретической, а его эффективная масса равна массе атома гелия), но ограничивает её применимость областью, где работает модель парных взаимодействий. Однако в температурном интервале, отвечающем за область, где кон-

центрация сюрфонов далека от насыщения, теория полностью объясняет температурную зависимость коэффициента поверхностного натяжения обоих изотопов жидкого гелия. В шестой главе построена теоретическая модель связанного состояния ультрахолодных нейтронов в гравитационном поле над отталкивающей их поверхностью жидкого гелия 4 и произведена оценка времени жизни связанного состояния ультрахолодных нейтронов в гравитационном поле над отталкивающей их поверхностью жидкого гелия четыре по всем не связанным с распадом нейтрона каналам рассеяния: из-за взаимодействия с атомами пара гелия, с риплонами, с фононами и сюрфонами. Этот расчет позволяет оценить перспективы создания ловушек для ультрахолодных нейтронов на основе жидкого гелия, а также точность измерений дискретных квантовых уровней нейтронов в гравитационном поле в зависимости от температуры гелия.

Глава 1

Введение

1.1 Актуальность проблемы

Электронные системы на поверхности жидкого гелия являются самыми чистыми электронными наносистемами в физике твердого тела и активно изучаются уже на протяжении нескольких десятилетий. По данной теме опубликовано несколько обзоров и монографий,[1, 2, 3] и данная система продолжает оставаться актуальной темой исследований. Локализованные электронные состояния на поверхности жидкого гелия являются перспективным кандидатом для реализации управляемой системы квантовых битов [4, 5, 6, 7, 8, 9]. С помощью электронов на поверхности жидкого гелия изучаются многие фундаментальные свойства низкоразмерных электронных систем. В частности, на поверхности жидкого гелия впервые наблюдалась вигнеровская кристаллизация двумерного электронного газа. Различные возбуждения на поверхности жидкого гелия определяют время когерентности поверхностных электронов. Поэтому предложенное в диссертации исследование относительно нового типа поверхностных возбуждений – отдельных атомов гелия на квантовых поверхностных уровнях (сюрфонов) – важно и актуально. Кроме влияния на поверхностные электронные состояния, новый тип поверхностных возбуждений изменяет фундаментальные физические свойства поверхности жидкости. Например, они дают главный вклад в температурную зависимость коэффициента поверхностного натяжения жидкого гелия [10, 11]. Сильная температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения жидкого гелия оставалась загадкой на протяжении более 20 лет как для гелия 4 [12], так и для гелия 3 [13], и новый тип поверхностных возбуждений впервые позволил ее объяснить. Результаты работы важны для понимания фундаментальных физических свойств поверхности жидкости, в особенности жидкости при низкой температуре, а также для примене-

ния электронных состояний вблизи поверхности жидкого гелия в квантовых электронных приборах. В частности, сюрфоны приводят к сильной температурной зависимости и к уменьшению коэффициента поверхностного натяжения жидкостей, к изменению спектра поверхностных волн, к увеличению скорости испарения жидкости и к многим другим эффектам. Например, сюрфоны приводят к рассеянию поверхностных электронов, к сдвигу и уширению линии перехода электронов между квантовыми состояниями на поверхности диэлектрических сред, и к уменьшению времени декогерентности электронов в квантовых битах при их реализации на квантовых точках на поверхности жидкого гелия. Полученные результаты позволяют глубже понять структуру поверхности криогенной жидкости. Поверхность криогенной жидкости позволяет также предложить эффективный и недорогой способ создания ловушек для ультрахолодных нейтронов. Такие локализованные нейтронные квантовые состояния, кроме возможностт более точного измерения времени β-распада нейтронов (что важно для уточнения параметров различных теорий элементарных частиц и их взаимодействий), также дают уникальную возможность экспериментального измерения гравитационного поля на малых масштабах длины и дискретных квантовых уровней нейтронов в гравитационном поле.[46, 47, 48, 49] Приведенные в последней главе диссертации теоретические оценки времени рассеяния ультрахолодных нейтронов на различных поверхностных возбуждениях, в том числе и на исследованных в первых главах диссертации сюрфонах, позволяют обосновать перспективность таких нейтронных ловушек и дать теоретические оценки потерь и уширения уровней энергии нейтронов в такой системе.

1.2 Цель диссертационной работы

Целью диссертационной работы является построение теоретической модели новых типов поверхностных возбуждений жидкости существующих при низких температурах - связанного состояния атома жидкости над поверхностью жидкости (сюрфона) и исследование его влияния на физику поверхности. В частности использование построенной модели для объяснения аномальной температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения обоих изотопов жидкого гелия, и для изучения процессов рассеяния на поверхности жидкого гелия. Целью диссертационной работы также является подробное изучение связанных состояний ультрахолодных нейтронов в гравитационном поле над отталкивающей их поверхностью жидкого гелия четыре, включая процессы их рассеяния на различных поверхностных возбуждениях, для теоретического обоснования перспективности такой системы для нейтронных ловушек. Для достижения поставленной цели решаются следую-

щие **основные задачи**:

- Теоретическое обоснование существования нового типа возбуждений (сюрфонов) на поверхности жидкости при низких температурах.
- Построение микроскопической модели связанного состояния атома (сюрфона) над поверхностью жидкости.
- Расчёт энергии активации сюрфонов и оценка их эффективной массы, в приближении одиночных сюрфонов.
- Объяснение температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения обоих изотопов жидкого гелия, в рамках сюрфонной теории.
- Учёт сюрфон-риплонного взаимодействия. Оценка времени жизни сюрфона по основному каналу распада.
- Оценка роли взаимодействия сюрфонов между собой, в рамках приближения парного взаимодействия.
- Теоретическое обоснование существования новой системы – связанного состояния ультрахолодных нейтронов в гравитационном поле на поверхности жидкого гелия 4.
- Построение микроскопической модели связанного состояния ультрахолодных нейтронов в гравитационном поле над поверхностью жидкого гелия 4.
- Оценка времени жизни связанного состояния ультрахолодных нейтронов в гравитационном поле над поверхностью жидкого гелия 4 по всем каналам рассеяния, сравнение результата с временем β-распада нейтрона и обсуждение перспектив и экспериментальных реализаций ловушек ультрахолодных нейтронов на поверхности жидкого гелия 4.

1.3 Научная новизна

Научная новизна диссертации заключена в том, что впервые

- Теоретически обосновано существование нового типа возбуждений (сюрфонов) на поверхности жидкости при низких температурах).
- Построена микроскопической модели связанного состояния атома (сюрфона) над поверхностью жидкости.
- Вычислена энергия активации и приведена оценка эффективной массы этого нового типа поверхностных возбуждений, в приближении одиночных сюрфонов.
- Приведен расчет температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения обоих изотопов жидкого гелия, в рамках сюрфонной теории, с учетом экспериментальных данных по температурной зависимости объемного химического потенциала жидкого гелия.
- Получена оценка времени жизни сюрфона по основному каналу распада: испарению атома с поверхности жидкости из-за сюрфон-риплонного взаимодействия.
- Исследовано влияние взаимодействия сюрфонов между собой, в рамках приближения парного взаимодействия, на их вклад в температурную зависимость коэффициента поверхностного натяжения.
- Теоретически обосновано существование связанного состояния ультрахолодного нейтрона в гравитационном поле над поверхностью жидкого гелия 4.
- Получена оценка времени рассеяния ультрахолодного нейтрона над поверхностью жидкого гелия 4 на различных типах возбуждений как функция температуры.

1.4 Достоверность полученных результатов

Полученные результаты получены на основе строгих теоретических расчетов и согласуются с экспериментальными данными и с результатами других вычислений, где перекрываются их области применимости. Это подтверждает достоверность полученных результатов.

1.5 Научная и практическая значимость результатов

Полученные результаты имеют большое значение для классификации поверхностных возбуждений жидкости при низкой температуре. Эти результаты также важны для понимания фундаментальной структуры поверхности жидкости и для анализа экспериментальных данных по изучению структуры поверхности жидкости на основе рассеяния рентгеновского излучения, электронов, нейтронов и нейтральных атомов на поверхности жидкости. Полученные результаты также важны для исследования свойств двумерной электронной системы на поверхности жидкого гелия. Такая электронная система используется для моделирования многих низкоразмерных электронных систем в физике твердого тела и интересна для реализации системы квантовых битов с большим временем декогерентности. Также, полученные результаты имеют значение для создания относительно недорогих нейтронных ловушек и исследования гравитационного поля на малых масштабах длины.

1.6 Основные результаты

На защиту выносятся следующие результаты

- Теоретическое обоснование существование дискретного квантового квазистационарного уровня энергии атомов гелия над поверхностью жидкого гелия. Этот уровень соответствует дополнительному типу поверхностных возбуждений (сюрфонов) изотопически-чистого жидкого гелия 4 или гелия 3, который вносит существенный вклад в термодинамику поверхности криогенной жидкости.

- Наглядная микроскопическая модель связанного состояния атома (сюрфона) над поверхностью жидкости, которую удобно использовать для расчетов их влияния на физически наблюдаемые эффекты.

- Теоретические оценки энергии активации и эффективной массы сюрфонов.

- Количественное описание температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения обоих изотопов жидкого гелия в рамках предложенной модели.

- Исследование взаимодействия сюрфонов с квантами поверхностных волн (риплонов). Оценка времени жизни сюрфона как возбуждения по основному каналу распада при конечной температуре – переходу атома гелия в непрерывный спектр атомов пара (испарению).

- Оценка вклада в термодинамику поверхности от взаимодействия сюрфонов между собой в рамках приближения парного взаимодействия.

- Теоретическая модель квантовых состояний ультрахолодных нейтронов на поверхности жидкого гелия. В рамках этой модели теоретические оценки скорости рассеяния нейтронов в этих состояниях на различных возбуждениях поверхности жидкого гелия и на атомах пара гелия. Обоснование возможности и преимуществ использования поверхности жидкого гелия для ловушек ультрахолодных нейтронов.

1.7 Апробация работы и публикации

Работа была представлена диссертантом во время устных докладов на пяти научных конференциях:

1). XI Всероссийская Конференция молодых ученых "Проблемы физики твердого тела и высоких давлений (10-19 сентября 2010, г. Сочи, Россия).

2). XI Всероссийская молодёжная школа-семинар по проблемам физики конденсированного состояния вещества (СПФКС-11), (15 – 21 ноября 2010, г. Екатеринбург, Россия).

3). XIII Всероссийская Конференция молодых ученых "Проблемы физики твердого тела и высоких давлений (12-21 сентября 2014, г. Сочи, Россия).

4). "The XXII International Workshop High Energy Physics and Quantum Field Theory (24 июня – 1 июля 2015, г. Самара, Россия).

5). "XXXVII международная конференция по физике низких температур"(29 июня - 3 июля 2015, г. Казань, Россия).

Работа также докладывалась на научных семинарах в институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН и в институте физики высоких давлений РАН.

Результаты диссертационной работы опубликованы в статьях

1. A.D. Grigoriev, P.D. Grigoriev, A.M. Dyugaev, *Surface Levels and Their Contribution to the Surface Tension of Quantum Liquids*, J. Low Temp. Phys. **163**, 131-147 (2011).

2. А.Д. Григорьев, П.Д. Григорьев, А.М. Дюгаев, А.Ф. Крутов, *Оценка времени испарения сюрфонов с поверхности жидкого гелия из-за рассеяния на риплонах*, Физика низких темп., 38(11), 1274-1283 (2012) [A.D. Grigoriev, P.D. Grigoriev, A.M. Dyugaev, A.F. Krutov, Estimate of surfon evaporation time from the liquid helium surface due to the scattering on ripplons, Low Temp. Phys., **38**(11), 1005-1012 (2012)].

3. P.D. Grigoriev, O. Zimmer, A.D. Grigoriev, T. Ziman, *Neutrons on a surface of liquid helium*, Phys. Rev. C **94**, 025504 (2016).

1.8 Обзор достижений в данной области и мотивация исследований

Микроскопическое описание поверхности жидкостей имеет важное значение в самых разных областях естественных наук: физике, химии, биологии, медицине. Физическая задача о структуре поверхности жидкости оказалась довольно сложной, и даже расчет коэффициента поверхностного натяжения из первых принципов имеет много трудностей[10]. При низкой температуре становится важной квантовая природа поверхностных возбуждений. При очень низкой температуре лишь несколько типов поверхностных возбуждений с энергией меньше или порядка температуры (помноженной на постоянную Больцмана) имеют существенную концентрацию. Поэтому только эти несколько типов низкоэнергетических возбуждений играют заметную роль в физике поверхности. Этот факт сильно упрощает микроскопическое описание поверхности. Точный микроскопический расчет абсолютной величины поверхностного натяжения α остается сложной задачей, но вычисление его температурной зависимости $\alpha(T)$ заметно упрощается.

Среди всех известных веществ в природе, только гелий остается в жидком состоянии при уменьшении температуры до абсолютного нуля. Это связано с малой массой атомов гелия, приводящей к большой квантовой кинетической энергии в упорядоченном состоянии. Кроме того, в отличие от водорода, взаимодействием между атомами гелия очень слабое по сравнению с другими химическими элементами из-за того, что у гелия заполнены все внутренние электронные оболочки, и любое возбуждение электронов в атоме требует большой энергии. Поэтому даже силы Ван дер Ваальса, связанные с виртуальными возбуждениями электронных оболочек и дающие притяжение между атомами во втором порядке теории возмущений,[39] в гелии очень малы. Еще одним физическим следствием малости сил Ван дер Ваальса у гелия является малость коэффициента поверхностного натяжения жидкого гелия. Так, поверхностное натяжение наиболее распространенного изотопа гелия ^{4}He при температуре $T \to 0$ составляет[12] $\alpha_{He4}(T=0) \equiv \alpha_{04} = 0.3544$ дин/см, что на два порядка меньше поверхностного натяжения воды. Поверхностное натяжение другого изотопа гелия ^{3}He еще меньше и при $T \to 0$ составляет[13] $\alpha_{He3}(T=0) \equiv \alpha_{03} = 0.155$ дин/см. Приняв эти значения за точку отсчета, можно вычислить отклонение $\Delta\alpha(T) \equiv \alpha_0 - \alpha(T)$ как сумму вкладов от всех поверхностных возбуждений в термодинамический потенциал Ω (или в свободную энергию) поверхности единичной площади. По определению коэффициент поверхностного натяжения есть отношение работы, затрачиваемой на изменение площади поверхности жидкости, и самим изменением площади поверхности. В системе с

переменным числом частиц и фиксированным химическим (хим.) потенциалом, которой является жидкость в равновесии со своим паром, эта работа равна изменению поверхностной части термодинамического потенциала Ω (см. параграф 154 в [38]). Пренебрегая числом частиц на поверхности, это изменение совпадает со свободной энергией единицы площади поверхности, но мы в дальнейшем будем вычислять именно термодинамический потенциал Ω.

При низкой температуре концентрация поверхностных возбуждений мала и определяется химическим потенциалом и законом дисперсии возбуждений $\varepsilon(\mathbf{k})$ по формуле, аналогичной (56.2) в учебнике [38] для двумерного газа:

$$n(T) = \sum_k n_k, \tag{1.1}$$

где индекс k нумерует все квантовые состояния возбуждений (для каждого типа поверхностных возбуждений этот индекс совпадает с импульсом возбуждения вдоль плоскости поверхности), а числа заполнения n_k этих квантовых состояний даются распределением Бозе (или Ферми) (см. формулы (53.2),(54.2) в [38]) и определяются статистикой возбуждений (бозоны или фермионы), химическим потенциалом и законом дисперсии возбуждений:

$$n_k = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon(\mathbf{k})-\mu}{T}\right) \mp 1}, \tag{1.2}$$

Поэтому, при достаточно низкой температуре можно пренебречь взаимодействием между возбуждениями, которое дает поправку к термодинамическому потенциалу, пропорциональную квадрату концентрации.[38] Тогда поверхностные возбуждения образуют идеальный двумерный газ частиц с дисперсией, определяемой природой этих возбуждений. Термодинамический потенциал Ω такого газа вычисляется по формулам (53.4),(54.4) в [38]:

$$\Omega = \pm T \sum_k \ln\left(1 \mp \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{T}\right)\right), \tag{1.3}$$

Верхний знак соответствует бозонам, нижний фермионам. Суммирование по квантовым состояниям k производится аналогично формуле (56.6) в [38], полученной для трехмерного газа. Таким образом задача о поверхностном натяжении жидкости при очень низкой температуре сводится к исследованию всех поверхностных возбуждений этой жидкости.

Традиционно считается, что при низкой температуре на поверхности жидкого гелия выживает единственный тип возбуждений – кванты поверхностных волн, называемые риплонами (от английского слова ripple – рябь на воде). Закон дисперсии риплонов[55, 1]

$$\omega_q^2 = \frac{\alpha}{\rho} q(q^2 + \kappa^2)\ \tanh(qd), \tag{1.4}$$

где α - коэффициент поверхностного натяжения, $\rho \equiv \rho_{He}$ - плотность жидкости (в нашем случае гелия $\rho \equiv \rho_{He}$) , d - толщина пленки гелия, а обратная гравитационно-капиллярная длина

$$\kappa = \sqrt{\frac{\rho}{\alpha}(g+f)}, \tag{1.5}$$

где $g = 983$см/сек – ускорение силы тяжести и f - константа Ван-дер-Ваальса, соответствующая силам притяжения, действующим на атомы гелия со стороны подложки ($f \propto d^{-4}$). Для достаточно толстой пленки гелия ($d > 1000A$) $f \ll g$, и значение $\kappa \approx 20$ см$^{-1}$ намного меньше характерных волновых векторов в рассматриваемой задаче. Поэтому почти всегда можно положить $\kappa = 0$. Риплоны являются бесщелевыми возбуждениями (их энергия может быть сколь угодно малой), и поэтому даже при очень низкой температуре числа заполнения их состояний с малой энергией конечна. Вклад идеального двумерного газа риплонов в температурную зависимость коэффициента поверхностного натяжения был впервые получен Аткинсом [14]:

$$\Delta\alpha_R(T) = AT^{7/3}, \tag{1.6}$$

где численный коэффициент $A = 6.8$ mdyn/cm$\cdot$K$^{7/3}$ для ^{4}He. Эта формула получается интегрированием уравнения (1.3), куда подставлен упрощенный закон дисперсии риплонов:

$$\omega_q^2 \approx \frac{\alpha}{\rho}q^3. \tag{1.7}$$

При этом хим. потенциал риплонов равен нулю, $\mu = 0$, аналогично хим. потенциалу фотонов в излучении черного тела.[38] Это связано с условием равновесия системы, где могут свободно рождаться и поглощаться частицы (в данном случае риплоны). Условие равновесия такой системы требует минимума свободной энергии $F(N)$ как функции числа частиц N, то есть $dF/dN = \mu = 0$.

Однако, температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения, даваемая уравнением (1.6), оказывается существенно слабее наблюдаемой на эксперименте[12] (см. рис. 3.2 ниже). Более того, формула Аткинса (1.6) применима только для ^{4}He в сверхтекучей фазе, поскольку при температуре выше λ-точки, $T_\lambda = 2.17$K, коротковолновые риплоны подавлены вязкостью жидкости (имеют сильное затухание). Заметим, что речь идет об очень коротковолновых (с обычной бытовой точки зрения) поверхностных волнах, определяемых условием $\hbar\omega_q = T$, которое для закона дисперсии (1.7) при $T = 1K$ дает волновое число риплонов $q \sim 1nm^{-1}$. Длинноволновые риплоны не подавляются вязкостью, однако их вклад в температурную зависимость поверхностного натяжения очень

мал из-за малости числа их квантовых состояний, пропорционального фазовому объему. Подавление риплонов с большой энергией должно привести к ослаблению зависимости (1.6) выше λ-точки. Эксперимент [12] , напротив, дает слабое изменение температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения, распространяющееся только на непосредственную окрестность фазового перехода в λ-точке. Эта нечувствительность коэффициента поверхностного натяжения к затуханию риплонов говорит о том, что вклад риплонов в эту температурную зависимость не является основным, и что вероятно существует еще другой вид поверхностных возбуждений.

В жидком ^{3}He вязкость намного выше, чем в ^{4}He, и только очень длинноволновые риплоны с энергией $\hbar\omega_k \ll T$ выживают при $T < 1K$, которые все равно не дают существенного вклада в $\alpha(T)$. Поэтому теория предсказывает очень слабую зависимость $\alpha\,(T)$ для ^{3}He во всем интервале температур, что абсолютно противоречит эксперименту[13]. Это противоречие между теорией и экспериментом по температурной зависимости поверхностного натяжения оставалось загадкой на протяжении нескольких десятилетий, пока не был предложен новый тип поверхностных возбуждений, существующий для обоих изотопов гелия.[15] Этот новый тип возбуждений, названный поверхностными атомными состояниями, или *сюрфонами*, позволил объяснить температурную зависимость поверхностного натяжения и достигнуть высокого согласия между теорией и экспериментом.[15] Сюрфоны похожи на поверхностные состояния атомов ^{3}He на поверхности жидкого ^{4}He в ^{3}He-^{4}He смеси[16], или на состояния ^{3}He и ^{4}He атомов на поверхности жидкого водорода.[30] Поверхностные состояния атомов в смеси ^{3}He-^{4}He, названные Андреевскими уровнями, также были предложены теоретически для объяснения температурной зависимости поверхностного натяжения в этих смесях[16]. Главное отличие между Андреевскими состояниями и сюрфонами заключается в том, что последние существуют даже в чистых изотопах гелия. Кроме этого, волновая функция атома на Андреевском уровне имеет максимум под поверхностью, в то время как волновая функция сюрфона имеем максимум на расстоянии $z_0 \sim 5$Åнад поверхностью жидкого гелия и практически равна нулю под поверхностью и даже на самой поверхности $z_0 = 0$.

Детальное микроскопическое описание этого нового типа возбуждений есть довольно сложная многочастичная задача. В работе [15] сюрфоны были рассмотрены феноменологически как квантовые состояния атомов гелия, локализованные вблизи поверхности жидкого гелия. Сюрфоны могут распространяться вдоль поверхности и имеют квадратичный закон дисперсии вдоль плоскости поверхности:

$$\varepsilon(k) = E_s + k^2/2M^*, \tag{1.8}$$

где k есть двумерный импульс сюрфонов вдоль поверхности, а энергия сюрфонов E_s и их эффективная масса M^* зависят от изотопа гелия: ^{3}He или ^{4}He. Энергия сюрфонов E_s находится по величине между энергией атомов гелия в вакууме, принятой ниже за точку отсчета энергии $E_{vac}^{He} = 0$, и хим. потенциалом μ атомов внутри жидкого гелия. При $T \to 0$ хим. потенциалы жидкого ^{4}He и ^{3}He равны соответсвенно

$$\mu_0^{He4} = -7.17K, \text{ и } \mu_0^{He3} = -2.5K. \tag{1.9}$$

Рождение сюрфона есть термически-активационный процесс, с энергией активации

$$\Delta(T) = E_s - \mu(T). \tag{1.10}$$

При очень низкой температуре $T \ll \Delta$ концентрация сюрфонов экспоненциально мала. Ниже, сравнивая экспериментальные данные по температурной зависимости поверхностного натяжения с расчетной зависимостью из-за вклада сюрфонов, мы получим следующие значения активационной энергии сюрфонов в ^{4}He и ^{3}He:

$$\Delta^{He4} \approx 2.67K, \ \Delta^{He3} \approx 0.25K. \tag{1.11}$$

Соответсвтвующие энергии основного состояния сюрфонов

$$E_s^{He4} \approx -4.5K \text{ и } E_s^{He3} \approx -2.25K. \tag{1.12}$$

Эффективные массы сюрфонов, получаемые из этой подгонки, равны

$$M_4^* \approx 2.65M_4^0, \text{ и } M_3^* \approx 2.25M_3^0, \tag{1.13}$$

где $M_4^0 = 6.7 \cdot 10^{-24}$г и $M_3^0 = 5.05 \cdot 10^{-24}$г есть массы свободных атомов ^{4}He и ^{3}He.

Микроскопические численные расчеты основного состояния и возбуждений в жидком гелии, активно проводились как для бесконечного объема,[18] так и для тонких пленок жидкого гелия [20, 21, 22, 23] (последние с целью сравнения с экспериментами[27, 28] по рассеянию нейтронов на поверхности пленки гелия). Эти вычисления также предлагают несколько типов поверхностных возбуждений с разной энергией активации в дополнение к риплонам.[20, 21, 22, 23, 24, 25] Эти численные расчеты применяют вариационный метод коррелированных базисных функций (CBF) [19] для неоднородной жидкости, используя некоторые дополнительные приближения. Эти вариационные CBF расчеты основаны на волновой функции Финберга (Feenberg), учитывают только парные корреляции и выполняются в так называемом hypernetted chain приближении.[18, 20] Эти расчеты также предполагают, что только одночастичная компонента функции Финберга зависит от внешних

и внутренних возмущений.[20] Это предположение статических парных корреляций ограничивает область применимости этой теории к длинам волн больше, чем среднее расстояние между двумя частицами. Оно также может ограничить теорию малыми отклонениями плотности жидкого гелия от равновесия (основного состояния). Эффекты обратного влияния (backflow effects[18]) также игнорируются в этих численных расчетах. Поэтому теоретически полученные (в рамках этих приближений) энергии возбуждений, вычисленные для больших значений волнового числа $q_{\|}$, существенно выше экспериментальных результатов.[25] Большая часть численых расчетов[18, 20, 21, 22, 23] изучает только волновые функции атомов внутри гелия, пренебрегая квантовыми состояниями атомов над поверхностью (паром гелия), к которым скорее всего и принадлежит сюрфон. Тем не менее граница насыщенный пар - жидкость в гелии также изучалась.[24, 25] Поскольку применяемый вариационный метод Джастроу (Jastrow) для объемной жидкости сам по себе не ограничивает систему при плотности насыщения гелия, внешний потенциал вводится феноменологически в этих численных расчетов для стабилизации поверхности.[24, 25] Сила этого дополнительного феноменологического потенциала регулируется таким образом, что вычисленный химический потенциал совпадает с экспериментальным значением при насыщении пара.[25] Наконец, примененный в [18, 20, 21, 22, 23, 24, 25] численный анализ предполагает, что поверхностные возбуждения не нарушают трансляционной симметрии вдоль поверхности, которая не может описывают случай одного сюрфона с нулевым импульсом вдоль плоскости. Тем не менее, сравнение поверхностных возбуждений, полученных этими приближенными численными расчетами,[18, 20, 21, 22, 23, 24, 25] с полу-феноменологически предложенными сюрфонами [15], подробно изучаемыми в диссертации, является весьма полезным и будет сделано в разделе 4.4.

Роль сюрфонов может оказаться очень важной для различных физических эффектов, связанных с поверхностью жидкости при низкой температуре. Например, сюрфоны оказывают важный эффект на свойства электронов на поверхности жидкого гелия, которые привлекают большой интерес научного мира на протяжении нескольких десятилетий (см. обзоры и монографии [1, 2, 3] по данной теме). Электроны над поверхностью жидкого гелия удерживаются электрическими силами изображения, но не проникают в гелий, поскольку это стоит большого проигрыша в энергии $\sim 1eV \approx 12000K$. Недавно большое оживление вызвала идея[4] реализации квантовых битов и квантовых компьютеров с использованием электронов на поверхности жидкого гелия.[4, 5, 6, 7, 8, 9] Это связано с тем, что жидкий гелий является очень чистой системой. Все примеси при низкой температуре из него вымораживаются - оседают на стенках и дне сосуда благодаря силам притяже-

ния Ван дер Ваальса, которое практически для всех других атомов сильнее, чем для гелия. Единственным возбуждением, на котором рассеиваются поверхностные электроны - это риплоны, которые для поверхностных электронов играют роль, аналогичную фононам в твердом теле. Однако ширина дискретных уровней энергии электронов, вызванная рассеянием на риплонах, оказывается малой.[5, 6, 33, 34] Это приводит к большому времени расфазировки (декогерентности) волновых функций кубита - свойству, необходимому для реализации квантовых вычислений. Существование еще одного типа поверхностных возбуждений может существенно повлиять на свойства электронных состояний на поверхности жидкого гелия. Действительно, рассеяние на сюрфонах уменьшает подвижность поверхностных электронов[31]. Это рассеяние также влияет на электронные переходы между дискретными уровнями на поверхности, приводя к сдвигу и уширению линии перехода.[2, 32]

В главе 2 диссертации дается микроскопическое обосновывание существования сюрфонов и изучаются их свойства. Получены оценки энергии и эффективной массы сюрфонов из микроскопических соображений. В главе 3 вычислен вклад сюрфонов в температурную зависимость поверхностного натяжения и проводится ее детальное сравнение с экспериментом. При этом учет температурной зависимости хим. потенциала жидкого гелия, которую мы вычисляем на основе экспериментальных данных по теплоемкости, плотности и давлению насыщенного, позволяет достичь согласия с экспериментом по температурной зависимости поверхностного натяжения $\Delta\alpha\,(T)$ с точностью существующих экспериментальных данных, то есть с погрешностью $\lesssim 1\%$ на всем интервале температур жидкого гелия от абсолютного нуля до точки кипения. Это решает существующую загадку по температурной зависимости поверхностного натяжения и стимулирует дальнейшее экспериментальное и теоретическое исследование предложенного типа возбуждений. В главе 4 проведены расчеты времени испарения сюрфонов из-за рассеяния на риплонах. Этот механизм определяет время жизни сюрфона как возбуждения при конечной температуре. В главе 5 изучается еще один тип нейтральных частиц на поверхности жидкого гелия – ультрахолодные нейтроны (УХН). Создание нейтронных ловушек остается известной проблемой, ограничивающей точность экспериментов по определению времени жизни нейтрона. Недавние эксперименты,[46, 47, 48, 49, 50] указывающие на существование дискретных энергетических уровней УХН в гравитационном потенциале Земли, открывают интересную ветвь физики нейтронов и пролагают путь к использованию гравитационной резонансной спектроскопии для изучения гравитационных сил на малых дистанциях. Обычно нейтроны удерживаются над тщательно отполированными зеркалами, которые дороги и

служат недолго. В главе 6 теоретически изучается возможность удержания ультрахолодных нейтронов над поверхностью жидкого гелия как альтернатива использования полированных зеркал. Сложность заключается в том, что рассеяние нейтронов на тепловых возбуждениях жидкого гелия сообщает УХН энергию, достаточную для проникновения внутрь жидкого гелия и даже внутрь стенок сосуда, поэтому такое рассеяние приводит к потере нейтрона в ловушке. В главе 6 вычисляется время рассеяния УХН на различных возбуждениях на поверхности жидкого гелия, которое показывает перспективность ловушек УХН на поверхности жидкого гелия.

Глава 2

Оценка энергии активации сюрфона и его эффективной массы

Цель этого раздела обосновать существование сюрфонов из квантово-механического расчета и дать хотя бы грубые теоретические оценки энергии активации и эффективной массы сюрфонов. В следующем разделе мы найдем эти значения более точно из сравнения с экспериментом температурной зависимости поверхностного натяжения $\Delta\alpha\,(T)$. Для оценочных расчетов в этом разделе мы используем упрощенное взаимодействие между атомами гелия, включающее только потенциал Ван дер Ваальса и отталкивание атомов на близком расстоянии. В таком приближении мы пренебрегаем обменными эффектами, которые при расчете энергии атомов гелия играют более слабую роль из-за слабого перекрытия волновых функций атомов гелия благодаря сильному отталкиванию на близком расстоянии. Это отталкивание связано с тем, что нижняя электронная оболочка атомов гелия полностью заполнена. Так, даже в объеме жидкости среднее расстояние между атомами гелия $\approx 3\mathring{A}$, что существенно превышает боровский радиус. Далее мы вычисляем потенциальную энергию атома гелия как функцию расстояния до поверхности, и решаем уравнение Шредингера для этого атома. Полученное собственное значение энергии дает энергию активации сюрфона в нулевом приближении. Далее мы исследуем эффекты искривления поверхности жидкости вблизи сюрфона, то есть образования лунки на поверхности под сюрфоном. Глубину этой лунки мы оцениваем минимизируя полную энергию сюрфона. Эта лунка понижает энергию активации сюрфона и перенормирует его эффективную массу при движении вдоль поверхности.

2.1 Энергия активации сюрфонов над идеальной плоской поверхностью

Взаимодействие между двумя атомами гелия может быть описано потенциалом Леннарда-Джонса[35]

$$V_{LJ}(r) = 4\epsilon_0 \left[(\sigma_0/r)^{12} - (\sigma_0/r)^6\right], \tag{2.1}$$

где коэффициенты

$$\epsilon_0 = 10.22K \text{ и } \sigma_0 = 2.556\mathring{A}$$

одинаковы для обоих изотопов гелия и известны из экспериментального исследования рассеяния атомов гелия. Этот потенциал включает притяжение Ван дер Ваальса на далеком расстоянии и отталкивание атомов на близком расстоянии. В главном приближении, потенциальная энергия атома над поверхностью жидкости может быть вычислена суммированием потенциала (2.1) по всем атомам жидкости. Такое приближение пренебрегает обратным влиянием атома над поверхностью на жидкость в объеме, которое будет учтено ниже при исследовании деформации поверхности под сюрфоном. Интегрирование потенциала Леннарда-Джонса (2.1) по полупространству $z < 0$, занимаемому жидкостью, дает следующий результат для потенциальной энергии атома над поверхностью:

$$V(z) = \frac{4\pi\epsilon_0\sigma_0^3 n_b}{3}\left[\frac{1}{15}\left(\frac{\sigma_0}{z}\right)^9 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_0}{z}\right)^3\right]. \tag{2.2}$$

Здесь z - это расстояние от атома до поверхности, n_b - плотность частиц (атомов) в объеме гелия, которая для ^{4}He равна $n_{He4} = 0.02186\mathring{A}^{-3}$, а для ^{3}He равна $n_{He3} = 0.0164\mathring{A}^{-3}$ при низкой температуре $T \to 0$. Потенциал (2.2) притягивает атом на большом расстоянии $z > z_{\min} = \sigma_0 (2/5)^{1/6} \approx 2.194\mathring{A}$ и отталкивает при $z < z_{\min}$.

Численное решение одномерного уравнения Шредингера для атома гелия в потенциале (2.2) позволяет ответить на вопрос, существует ли связанное состояние (дискретный квантовый уровень) для атома над поверхностью, и дает оценку энергии этого уровня в нулевом приближении. Подставляя параметры, получаем для ^{4}He потенциал

$$V^{He4}(z) = \left(\frac{4852}{z^9} - \frac{130.5}{z^3}\right)[K],$$

и для ^{3}He потенциал

$$V^{He3}(z) = \left(\frac{3640}{z^9} - \frac{97.9}{z^3}\right)[K].$$

Решение одномерного уравнения Шредингера для частиц с массами ^{4}He и ^{3}He **доказывает существование** таких поверхностных дискретных уровней для обоих изотопов гелия, и дает значение энергии этих уровней в нулевом приближении:

$$E_{s0}^{He4} \approx -1.24K, \text{ и } E_{s0}^{He3} \approx -0.342K, \tag{2.3}$$

Эти значения существенно выше, чем значения (1.12), полученные из сравнения с экспериментом по температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения. Эта разница значений (1.12) и вычисленных значений (2.3) в предложенной грубой модели не удивительна. Во первых, эта модель рассматривает поверхность жидкости неизменной (твердой) и плоской, в то время как в действительности эта поверхность очень мягкая и подвержена деформациям, уменьшающим энергию сюрфона (2.3). Во-вторых, распределение атомов в жидкости неоднородно и тоже изменяется из-за присутствия атома на поверхностном уровне. Из-за притяжения жидкости к сюрфону, можно ожидать некоторое увеличение плотности жидкого гелия вокруг сюрфона. В третьих, как уже упоминалось, идентичность атомов в жидкости с атомом на поверхностном уровне приводит к обменной поправке к энергии и другим многочастичным эффектам, которые также понижают энергию активации сюрфона.[36]

Похожая проблема возникает при вычислении энергии Андреевских уровней,[16] то есть связанных состояний атомов ^{3}He на поверхности жидкого ^{4}He. Решение одномерного уравнения Шредингера для атомов ^{3}He в потенциале (2.2) дает энергию связанного состояния $E_A \approx -0.8K$, в то время как значение энергии Андреевских уровней, полученные из сравнения с экспериментом по температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения, составляет $E_A^{\exp} \approx -5K$. Различные теоретические подходы были развиты чтобы вычислить энергию Андреевских уровней более точно и добиться согласия с экспериментом,[11] однако эта проблема не решена до сих пор.

2.2 Образование лунки и ее влияние на энергию активации сюрфонов и их эффективную массу

В этом разделе мы рассмотрим эффекты, связанные с обратным влиянием сюрфона на жидкость в его окрестности. В первом приближении, следует исследовать образование лунки (статической деформации поверхности) под сюрфоном, аналогичную лунке под электроном[1, 2, 3] или отрицательным ионом[37] на поверхности жидкого гелия. В следующем приближении можно учесть также увеличение плотности жидкого гелия вблизи

сюрфона. Описанное подстраивание жидкости к появлению сюрфона аналогично полярону вокруг электронов в твердом теле.[19] Поверхностная деформация (лунка) есть полярон из риплонов, а увеличение плотности жидкости есть полярон из объемных аккустических фононов. Такой композитный полярон распространяется вместе с сюрфоном вдоль поверхности, уменьшая энергию активации сюрфона и увеличивая его эффективную массу. Поскольку относительное увеличение плотности жидкости мало, оно влияет на энергию активации сюрфона значительно слабее, чем образование лунки. Поверхностная деформация, напротив, изменяет параметры сюрфона довольно значительно, что следует из приведенных ниже оценок.

Для приближенного описания поверхностной деформации под сюрфоном, мы используем методы, похожие на уже использованные в теории лунки под электроном[1, 2, 3] или отрицательным ионом[37] на поверхности жидкого гелия, заменяя электростатическое притяжение силами Ван дер Ваальса. Благодаря образованию лунки система выигрывает потенциальную энергию Ван дер Ваальса E_W, но увеличивает энергию поверхностного натяжения жидкости E_{surf} и квантовую кинетическую энергию атома E_{kin}, ограничивая его волновую функцию. Все эти вклады в энергию лунки зависят от ее формы, которая находится из минимума полной энергии. Самосогласованное решение этой задачи требует решение аксиально-симметричного уравнения Шредингера для атома гелия вблизи лунки, с последующей минимизацией по форме лунки суммы собственного значения энергии, энергии Ван дер Ваальса и поверхностного натяжения. В настоящей работе мы не будем проводить эти вычисления, и ограничимся более грубыми оценками, поскольку модель классической поверхностной деформации и потенциала (2.1) уже является довольно приближенной. Для грубой оценки мы выберем форму лунки $\Delta z\left(x,y\right)=\xi\left(\rho\equiv\sqrt{x^2+y^2}\right)$ в виде сегмента сферы радиуса R и глубины h:

$$\xi\left(\rho\right)=\begin{cases} R-h-\sqrt{R^2-\rho^2}, & \rho<\sqrt{R^2-\left(R-h\right)^2} \\ 0, & \rho\geq\sqrt{R^2-\left(R-h\right)^2} \end{cases} \tag{2.4}$$

Заметим, что для обычной формы лунки (монотонной, с минимумом в центре) потеря в энергии поверхностного натяжения E_{surf} для мелкой лунки глубины $h\ll R$ пропорциональна квадрату глубины h^2, и лишь коэффициент пропорциональности зависит от конкретной формы лунки. Так, для сферической лунки (2.4)

$$E_{surf}=\pi h^2\sigma,$$

в то время как для существенно более гладкой лунки Гауссовой формы $\xi\left(\rho\right)=-h\exp\left(-\rho^2/2R^2\right)$ с такими же глубиной и радиусом кривизны в центре, проигрыш в энергии поверхностного

натяжения в два раза меньше: $E_{surf}^{Gaus} = \pi h^2 \sigma/2$. Силы Ван дер Ваальса короткодействующие, поэтому лунка оптимальной формы не должна быть существенно шире ее радиуса кривизны в центре, который определяется конкуренцией между потенциальной энергией Ван дер Ваальса E_W и квантовой кинетической энергией атома E_{kin}. Эта конкуренция имеет место также для атомов в объеме жидкого гелия и приводит к радиусу кривизны, равному оптимальному расстоянию между атомами $d = n_b^{-1/3} = 3.58\mathring{A}$ для ^{4}He и $d = 3.94\mathring{A}$ для ^{3}He. Энергия Ван дер Ваальса при этом может быть оценена интегрированием потенциала Леннарда-Джонса (2.1) по области жидкости вокруг лунки $0 < z < h$:

$$E_W = \int d^3\mathbf{r} n_b(\mathbf{r}) \int \Psi_s^2(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' V_{LJ}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{2.5}$$

Потеря кинетической энергии E_{kin}, эффективно, уже входит в энергию (2.5) через волновую функцию атома $\Psi_s(\mathbf{r})$ и минимальный радиус кривизны лунки d. Ее дополнительный учет как добавку к (2.5) будет превышением точности, поскольку мы также не учитываем противоположный вклад, связанный с отличием распределением квадрата волновой функции атома от δ-функции в центре атома. Итак, мы уменьшаем выигрыш в энергии Ван дер Ваальса выбирая волновую функцию атома в виде $\Psi_{SLA}^2(\mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)$, где $\mathbf{r}_0$ есть положение центра сюрфона. В результате получаем:

$$E_W + E_{kin} \approx n_b \int_0^h dz \int_{\rho_0(z)}^{\infty} \pi d\rho^2 V_{LJ}(r),$$

где $\rho_0^2(z) = R^2 - (R - h + z)^2 \approx 2R(h - z)$ и $r^2 = (R - h + z)^2 + \rho^2$. Интегрирование дает

$$\frac{E_W + E_{kin}}{4\pi\epsilon_0\sigma_0^2 n_b} \approx h\left[\frac{1}{5}\left(\frac{\sigma_0^2}{R^2}\right)^5 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_0^2}{R^2}\right)^2\right].$$

Для ^{4}He это дает $E_W \approx -2.3h$ и для ^{3}He это дает $E_W \approx -1.2h$, где глубина ямки $h[\mathring{A}]$ и $E_W[K]$. Минимизируя полную энергию сюрфона

$$\Delta E_s \approx E_W + E_{kin} + E_{surf}$$

получаем для ^{4}He оптимальную глубину лунки и выигрыш в энергии

$$h_4 \approx 1\mathring{A} \text{ и } \Delta E_s^{He4} \approx -1.2K. \tag{2.6}$$

Для ^{3}He

$$h_3 \approx 1.2\mathring{A} \text{ и } \Delta E_s^{He3} \approx -0.73K. \tag{2.7}$$

Эффективная масса сюрфона увеличивается благодаря образованию лунки. Это увеличение может быть грубо оценено следующим образом, считая жидкость сверхтекучей. Во время движения сюрфона вдоль поверхности все прилегающие атомы смещаются на расстояние порядка глубины лунки h. Со стороны жидкости к сюрфону плотно прилегают 3 атома. При движении сюрфона вдоль поверхности на межатомное расстояние d, 3 атома опустится на величину h, и 3 атома поднимется на такую же высоту. Поскольку ускорение сюрфона вызывает ускорении всех $n_{adj} = 6$ прилегающих атомов, которое в h/d раз меньше ускорения сюрфона. В результате, эффективная масса сюрфона увеличивается до

$$m^* \approx m_{He} \left(1 + n_{adj} h/d\right). \tag{2.8}$$

Подставляя числа получим

$$M_4^* \approx 3M_4^0, \text{ и } M_3^* \approx 2M_3^0. \tag{2.9}$$

Приведенные выше рассуждения дают лишь очень грубые оценки энергии активации и эффективной массы сюрфона. В следующем разделе мы вычисляем вклад сюрфонов в температурную зависимость поверхностного натяжения и сравниваем этот вклад с экспериментом. Это позволит извлечь параметры сюрфона с намного большей точностью.

Глава 3

Температурная зависимость поверхностного натяжения в жидком гелии и определение параметров сюрфонов из эксперимента.

Вклад $\Delta\alpha_S(T)$ двухмерного газа сюрфонов в температурную зависимость коэффициента поверхностного натяжения, равного термодинамическому потенциалу единицы площади поверхности (см. Введение), вычисляется по формуле (1.3), которая принимает вид[38]

$$\Delta\alpha_S(T) = \pm gT \int \ln\left[1 \pm \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon(k)}{T}\right)\right] \frac{d^2k}{(2\pi\hbar)^2}. \tag{3.1}$$

Здесь $\mu = \mu(T)$ температурно-зависимый химический потенциал жидкого гелия, $\varepsilon(k)$ - дисперсия сюрфонах, g спиновое вырождение ($g = 1$ для ^{4}He и $g = 2$ для ^{3}He), знак "$\pm$"в (3.1) обозначает "$-$"для бозонов и "$+$"для фермионов. Сюрфоны над ^{4}He – это бозоны с дисперсией (1.8). После введения новой переменной $z \equiv \exp\left[-k^2/2M^*T\right]$, вклад таких сюрфонов равен

$$\Delta\alpha_4(T) = \frac{T^2 M_4^*}{2\pi\hbar^2} \int_0^1 \frac{\ln\left[1 - z\,\exp\left(-\Delta_4/T\right)\right]}{z} dz, \tag{3.2}$$

где

$$\Delta_4 \equiv \Delta_4\left(T\right) = E_s^{He4} - \mu_4\left(T\right). \tag{3.3}$$

Сюрфоны над жидким ^{3}He являются фермионами, и из (3.1) мы получаем интегрированием по частям

$$\Delta\alpha_3(T) = -\frac{M_3^* T^2}{\pi\hbar^2}\int\limits_0^1 \frac{\ln\left[1 + z\,\exp\left(-\Delta_3/T\right)\right]}{z} dz, \tag{3.4}$$

где

$$\Delta_3 \equiv \Delta_3\left(T\right) = E_s^{He3} - \mu_3\left(T\right). \tag{3.5}$$

Из (3.2),(3.4) мы видим, что вклад сюрфонов в $\alpha_{3,4}(T)$, при низких температурах, зависит от температуры экспоненциально: $\Delta\alpha \propto T^2 \exp\left(-\Delta/T\right)$.

Для вычисления интегралов (3.2),(3.4) мы должны знать температурную зависимость химического потенциала $\mu\left(T\right)$, которая входит в уравнения (3.2) и (3.4) через активационную энергию сюрфонов Δ. В работе [15] эта зависимость учтена только для ^{3}He и только качественно, используя приближенную формулу (20) в работе [15]. Для количественного анализа в широких температурных рамках мы берём зависимость $\mu\left(T\right)$ из эксперимента. Мы используем точную формулу для химического потенциала

$$\mu\left(T\right) = \frac{F_V\left(T\right) + P\left(T\right)}{n_L\left(T\right)}, \tag{3.6}$$

где давление $P\left(T\right)$ равно давлению насыщенного пара, а плотность частиц жидкости n_L определяется из экспериментальной зависимости массовой плотности. Свободная энергия на единицу обьёма

$$F_V\left(T\right) = \int_0^T C_V\left(T\right) dT - TS_V\left(T\right), \tag{3.7}$$

где теплоёмкость C_V и энтропия S_V при постоянном обьёме также берутся из эксперимента. Для ^{4}He температурная зависимость величин C_V, S_V, P, n_L, входящих в уравнения (3.6) и (3.7), берется из работы [40]. Для ^{3}He значения $C_V\left(T\right)$ и $S_V\left(T\right)$ берутся из работы [41], а значения давления насыщенного пара – из работы [42]. Данные о температурной зависимости химического потенциала и энергии активации сюрфонов показаны на рисунках 3.1 и 3.5. Заметим, что для обоих изотопов гелия экспериментально измеренная температурная зависимость химического потенциала очень хорошо согласуется с предсказаниями теории квантовой невырожденной жидкости, развитой в работах [43],[44].

В сверхтекучем ^{4}He при $T < T_\lambda = 2.17K$ химический потенциал $\mu\left(T\right)$ слабо зависит от температуры. При $T > T_\lambda$ эта зависимость квадратична (см. вставку на Рис. 3.1), что согласуется с работой [43]:

$$\mu_4\left(T\right) = \mu_4\left(0\right) + \varepsilon_4^0 - T^2/T_4^0, \tag{3.8}$$

где $\varepsilon_4^0 = 0.55K$ и $T_4^0 = 5.59K$. Функция $\Delta_4(T)/T$, которая определяет температурную зависимость поверхностного натяжения $\Delta\alpha_4(T)$ в (3.2) и даётся уравнением (3.3), слабо зависит от температуры в интервале $T_\lambda < T < 4.5K$ (смотрите рисунок 3.1). Минимум функции $\Delta(T)/T$ приходится на $T \approx 3.5K$, но внутри промежутка $T_\lambda < T < 4.5K$ можно положить $\Delta(T)/T = const$ с точностью $\sim 4\%$. Тогда подынтегральная функция в уравнении (3.2) не зависит от температуры, что приводит к квадратичной зависимости от температуры у поверхностного натяжения жидкого ^{4}He с точностью $\sim 4\%$ (смотрите рисунки 3.2,3.3). Это разрешает давний вопрос об экспериментально обнаруженной квадратичной температурной зависимости $\Delta\alpha(T)$ в ^{4}He при $T > T_\lambda$. Значения $\Delta_4 = 2.67K$ и $M_4^* = 2.65M_4^0$ дают лучшее согласие с экспериментом. Вклад риплонов в температурную зависимость поверхностного натяжения $\Delta\alpha_4(T)$ мал и имеет максимум при $T \approx 1.1K$ (смотрите рисунок 3.4), где он даёт только $\sim 2\%$ от $\alpha_4(T)$ (смотрите рисунки 3.2,3.3). В работе [15] было показано, что при $T > T_\lambda$ тепловые риплоны с энергией $\hbar\omega_k \sim T$, которые дают основной вклад в $\Delta\alpha_4(T)$, быстро затухают из-за вязкости. В ^{3}He коротковолновые тепловые риплоны быстро затухают при любой температуре. Поэтому вклад риплонов в $\Delta\alpha_4(T)$ мал. Длинноволновые риплоны с энергиями $\hbar\omega_k \ll T$ не затухают от вязкости, но их вклад в $\Delta\alpha_4(T)$ мал из-за малости фазового обьёма.

Температурную зависимость химического потенциала $\mu_3(T)$ в ^{3}He, находим используя уравнения (3.6),(3.7) для экпериментальных данных из работы [41], показаных на рисунке 3.5. При $T > 0.3K$, где ^{3}He невырожден, эта зависимость с очень высокой точностью совпадает с формулой [43]

$$\mu_3(T) = \mu_3(0) - T\ln 2 + \varepsilon_3^0 - T^2/T_3^0, \tag{3.9}$$

где

$$\varepsilon_3^0 = 0.28K \text{ и } T_3^0 = 4.83K. \tag{3.10}$$

Для $T < 0.3K$, где ^{3}He вырожден,

$$\mu_3(T) \approx \mu_3(0) - T^2/2T_F, \tag{3.11}$$

где $T_F = 0.36K$. Заметим, что квадратичная температурная зависимость химического потенциала $\mu_3, \mu_4(T)$ является типичной особенностью квантовой невырожденной жидкости.[43, 44] Подобная температурная зависимость $\mu(T)$ наблюдается и для жидкого водорода.[32] Альтернативная теория этой зависимости дана в работе [45].

Также как в ^{4}He, в ^{3}He $\Delta_3(T)/T$ почти не зависит от температуры с точностью $\sim 5\%$ в широком температурном интервале $0.3K < T < 2.5K$ (смотрите вставку в рисунок

3.5). В соответствии с уравнением (3.4), эта особенность функции $\Delta_3(T)/T$ следует из почти квадратичной зависимости $\Delta\alpha_3(T)$ в широких температурных пределах (смотрите рисунок 3.6). Из сопоставления с экспериментом [13] поверхностного натяжения $\Delta\alpha_3(T)$ мы получаем значения $\Delta_3(0) = 0.25K$ и $M_3^* \approx 2.25M_3^0$.

Видно, что учет температурной зависимости хим. потенциала существенно улучшает согласие предлагаемой теории и экспериментальных данных по $\Delta\alpha(T)$ для обоих изотопов гелия (см. Рис. 3.2 и 3.6). Согласно представленным выше вычислениям и экспериментальным данным, в широком температурном интервале отклонение коэффициента поверхностного натяжения от его значения при $T = 0$ пропорционально T^2: $\Delta\alpha_3(T) \propto T^2$ и $\Delta\alpha_4(T) \propto T^2$. Это показывает, что статистика сюрфонов (фермионы или бозоны) практически не играет роли в поверхностных явлениях в жидком гелии. Микроскопические параметры сюрфонов, полученные из сравнения $\Delta\alpha_(T)$ с экспериментом, могут быть использованы в более тщательном теоретическом исследовании структуры этого нового типа поверхностных возбуждений.

Для еще более аккуратного вычисления вклада сюрфонов в термодинамику поверхности, можно также учесть взаимодйствие между сюрфонами по теории возмущений. Предварительные оценки роли взаимодействия между сюрфонами показывают следующее. При низкой температуре из-за малости концентрации сюрфонов их взаимодействием можно совсем пренебречь, а при высокой температуре это взаимодействие сводится к перенормировке эффективной массы сюрфонов. Поправки к термодинамическому потенциалу поверхности и его температурной зависимости из-за взаимодействия сюрфонов друг с другом в рамках парного взаимодействия и классической механики движения сюрфонов оценены в Приложении А.

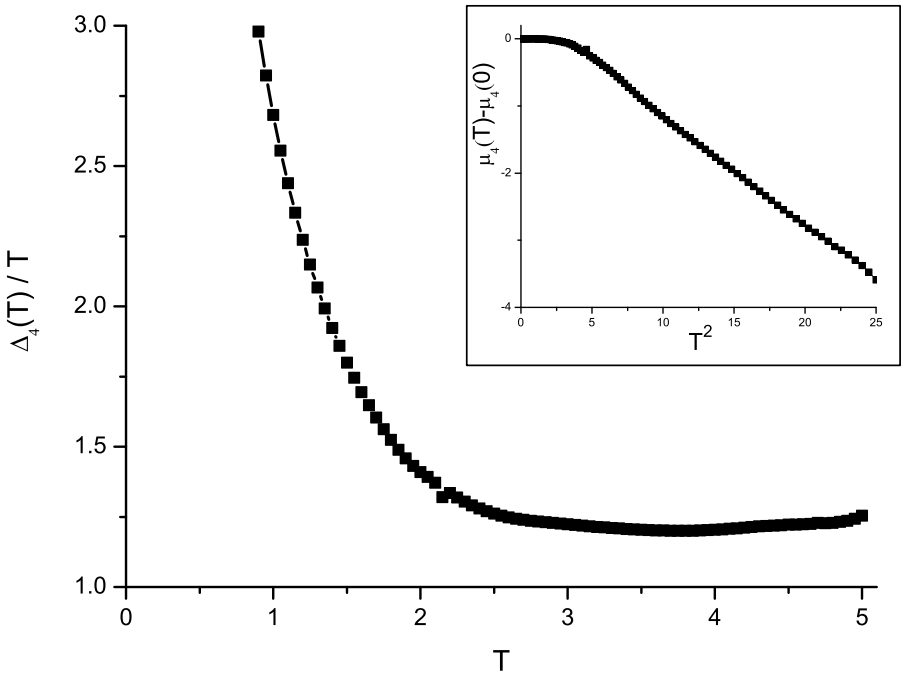


Рис. 3.1: Температурная зависимость энергии активации сюрфонов $\Delta_4(T)$ для жидкого ^{4}He, поделенная на температуру. Такая комбинация входит уравнение (3.2). Эта зависимость получена из экспериментальных данных из обзора [40], позволяющих вычислить температурную зависимость хим. потенциала $\mu_4(T) - \mu_4(0)$ жидкого ^{4}He, показанную на вставке к рисунку. Данный график показывает, что комбинация $\Delta(T)/T$, входящая в ур. (3.2), почти не зависит от температуры в широком интервале $T_\lambda < T \lesssim 4K$. Это свойство приводит к квадратичной температурной зависимости поверхностного натяжения (3.2) при $T > T_\lambda$.

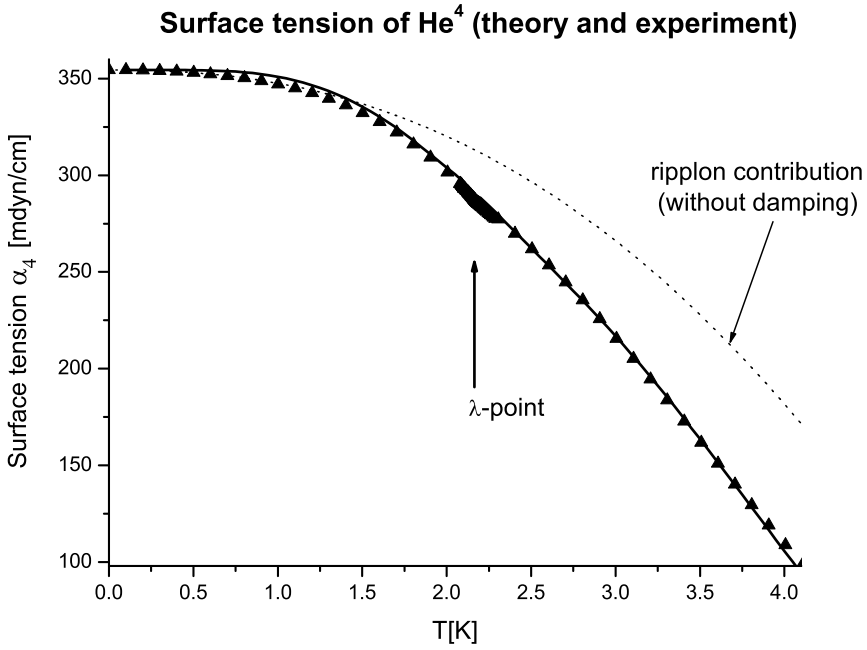


Рис. 3.2: Вычисленный вклад сюрфонов в температурную зависимость поверхностного натяжения жидкого ^{4}He (сплошная линия) в сравнении с экспериментальными данными из работы [12] (черные треугольники). При $T > T_\lambda$ согласие настолько высокое, что в линейном масштабе разница не может быть определена на глаз. В этом температурном интервале тепловые риплоны подавлены из-за вязкости жидкости, и риплонный вклад в поверхностное натяжение $\Delta\alpha_4(T)$ мал. При низкой температуре в сверхтекучей фазе вязкость отсутствует, а концентрация сюрфонов экспоненциально мала из-за конечной активационной энергии $\Delta^{He4} \approx 2.7K$, так что основной вклад в $\Delta\alpha_4(T)$ происходит от риплонов, закон дисперсии которых [см. ур. (1.4)] бесщелевой. Вклад риплонов без затухания, вычисленный по формуле (1.6), применимой только глубоко в сверхтекучей фаэе, представлен на рисунке точечной линией. Эта линия описывает экспериментальные данные только при $T \lesssim 1K$.

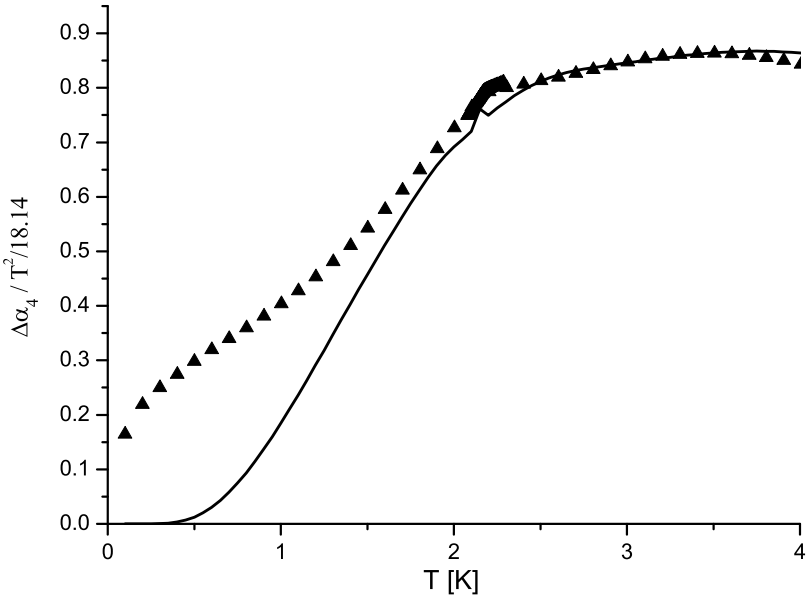


Рис. 3.3: Температурная зависимость вклада сюрфонов в поверхностное натяжение $\Delta\alpha_4\,(T)$ ^{4}He, поделенного на T^2. Этот график показывает сравнение нашей теории с экспериментальными данными в координатах, где различие лучше всего заметно. Отклонение при низкой температуре $T < T_\lambda$ возникает в следствие вклада риплонов, который уменьшается из-за вязкости при приближении к λ-точке. Отклонение при $T > 4K$ возникает из-за близости к точке кипения. Вклад риплонов при $T < T_\lambda$, полученный из этого графика, показан на рис. 3.4

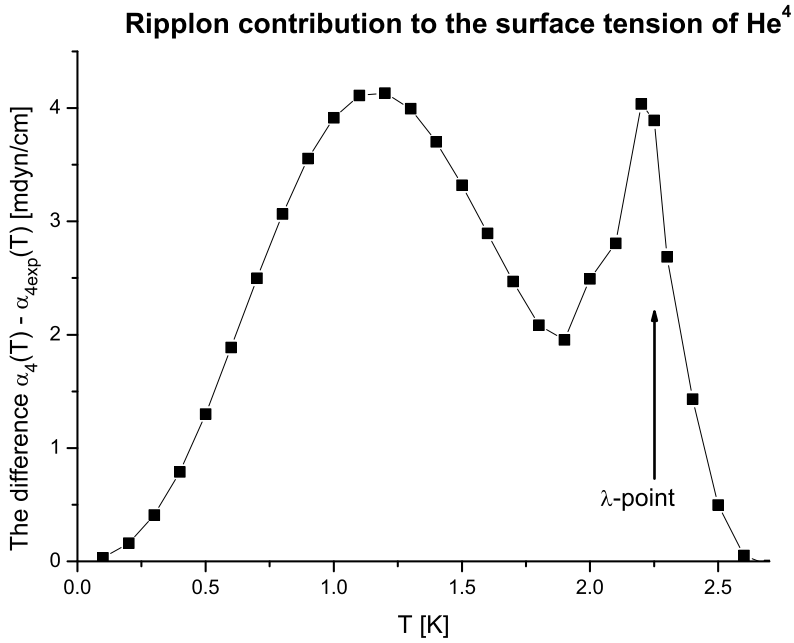


Рис. 3.4: Разница между вкладом сюрфонов в температурную зависимость поверхностного натяжения ^{4}He, $\alpha_4(T)$, вычисленный из ур. (3.2), и экспериментальными значениями $\alpha_{4\,\mathrm{exp}}(T)$. Максимум разницы при $T \approx 1.1K$ дает риплонный вклад в $\alpha_{4\,\mathrm{exp}}(T)$. При $T < 1K$ он хорошо описывается ур. (1.6). Второй максимум отклонения при $T \approx 2.17K$, то есть в λ-точке, возникает из-за фазового перехода в сверхтекучее состояние ^{4}He.

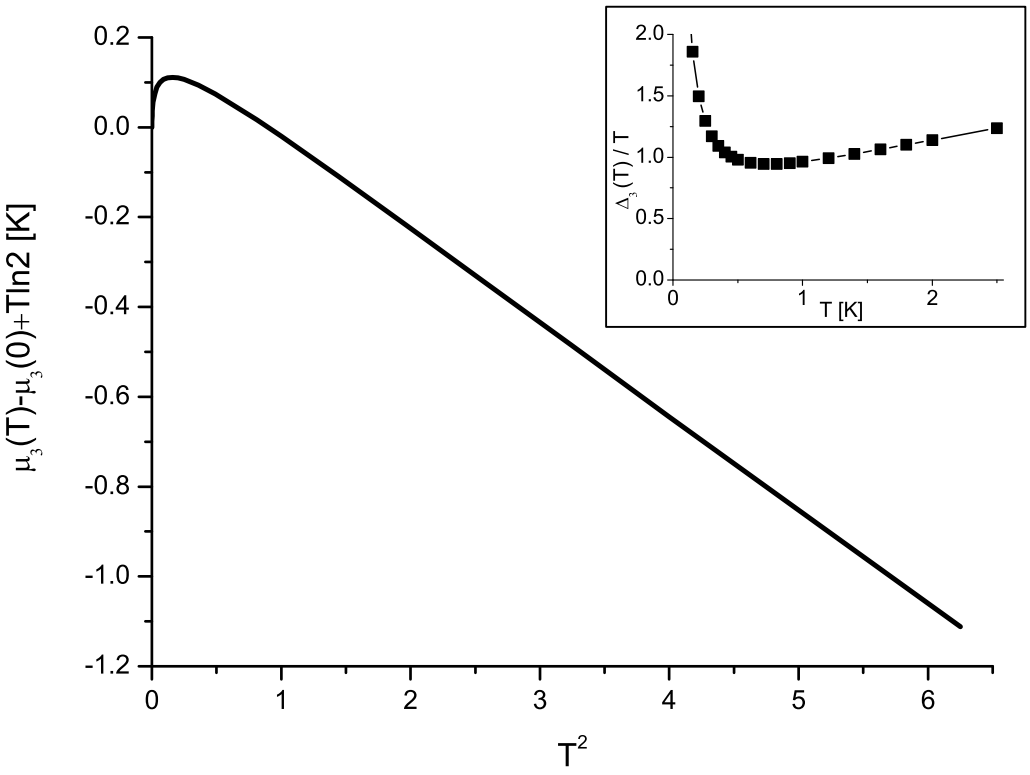


Рис. 3.5: Экспериментальная температурная зависимость химического потенциала $\mu_3(T) - \mu_3(0) + T\ln 2$, полученная из данных работы [41], построенная как функция T^2. Данный график показывает, что уравнение (3.9) выполняется с высокой точностью. Внутренний график показывает температурную зависимость активационной энергии сюрфонов $\Delta_3(T)$, поделенную на температуру, как она входит в уравнение (3.4). Видно, что $\Delta_3(T)/T$ практически не зависит от температуры в интервале $0.3K < T \lesssim 2.5K$. Такая зависимость $\Delta_3(T)$, после подстановки в уравнение (3.4), приводит к квадратичной температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения $\Delta\alpha_3(T)$ при $T > 0.3K$.

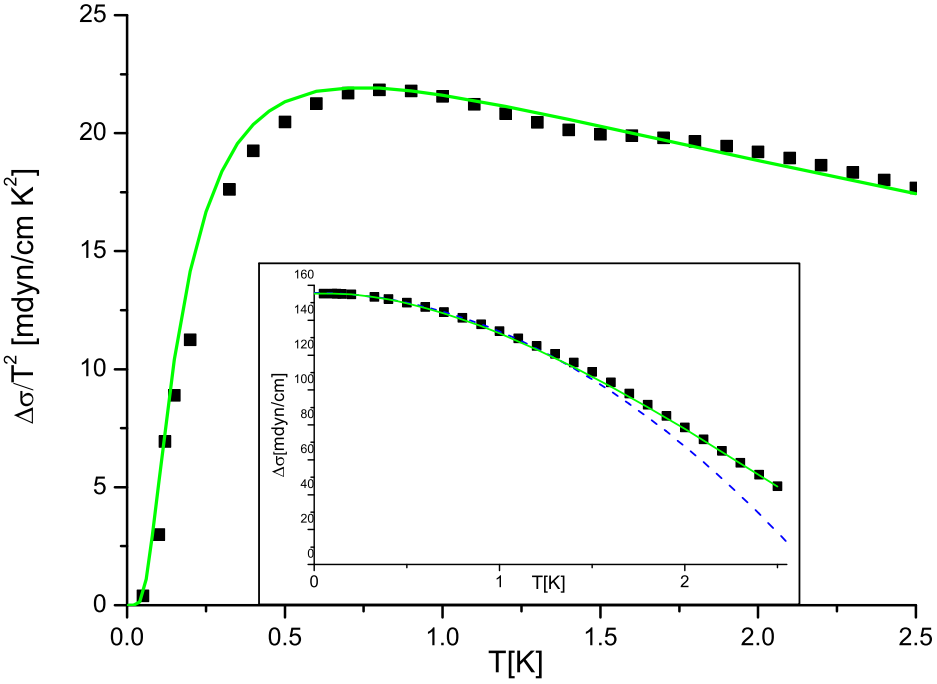


Рис. 3.6: Температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения ^{3}He, вычисленная согласно уравнениям (3.4),(3.5) (сплошная зеленая линия), в сравнении с экспериментальными данными из работы [13] (черные квадраты). Согласие настолько высокое, что в линейном масштабе (вставка к рисунку) разница между теоретическим предсказанием и экспериментальными данными не различима на глаз. Поэтому, на основном графике построена зависимость $\Delta\alpha_3/T^2$. Синяя пунктирная линия соответствует вычислению в работе [15] и показывает вклад сюрфонов, вычисленный с использованием приближенной зависимости хим. потенциала. Видно,что согласие между теорией и экспериметом улучшается, если взять в расчет экспериментальную температурную зависимость хим. потенциала $\mu(T)$.

Глава 4

Взаимодействие сюрфонов с риплонами

Поверхностные волны (риплоны) могут приводить к переходам атомов гелия с поверхностного уровня (сюрфона) в непрерывный спектр (пар гелия), сообщая недостающую для этого энергию (1.12). Поскольку спектр риплонов (1.4) очень мягкий, то риплоны с энергией $\hbar\omega_k = 4K$ являются очень коротковолновыми, то есть имеют волновое число $k \approx (2\mathring{A})^{-1}$. С таким волновым числом затухание риплонов из-за вязкости жидкости очень сильно, то есть концентрация таких риплонов мала даже при $T \approx \hbar\omega_k$. Согласно рис. 3.4, существенную роль коротковолновые риплоны играют только в сверхтекучей фазе ^{4}He и только при $T < 2K$. Кроме того, теория риплонов с таким большим волновым числом пока еще не достаточно развита, и структура и закон дисперсии таких коротковолновых риплонов (с длиной волны порядка межатомного расстояния в гелии) существенно отличается от поверхностных волн, как это следует из экспериментов по рассеянию нейтронов на поверхности жидкого гелия [27, 28]. Однако, энергию, необходимую для активации в непрерывный спектр атом гелия на поверхностном уровне может получить и из энергии своего движения вдоль плоскости. Тогда даже взаимодействие с риплоном малой энергии может привести к испарению этого атома.

Заранее следует отметить, что время декогерентности электронов на поверхностном уровне над гелием, используемых для квантовых вычислений, подробно исследовалось в работе [5]. Рассеяние на риплонах, приводящее к спонтанным электронным переходам и к конечной ширине уровней, ограничивало время жизни электрона на дискретном уровне до $\tau = 1$миллисекунды. Такое время жизни можно считать бесконечно большим в термодинамическом смысле, поскольку $\tau \gg \hbar/k_BT \approx 10^{-11}$секунд. В задаче о рассеянии электронов на риплонах такое большое время жизни связано с тем, что вклад дают только многориплонные (двух и более) процессы рассеяния, матричный элемент которых мал

в силу малости константы электрон-риплонного взаимодействия. Однориплонные процессы рассеяния электронов оказываются не существенными, поскольку их матричный элемент для риплонов с энергией порядка расстояния между дискретными электронными уровнями оказывается экспоненциально малым $\sim \exp(-ka)$, где волновое число риплона $k \approx (2A)^{-1}$, а радиус локализации электронной волновой функции в плоскости $a \approx 100A$. В случае сюрфонов, однориплонные процессы рассеяния должны быть определяющими, поскольку радиус локализации сюрфонов порядка межатомного расстояния $a \approx 3A$, и матричный элемент сюрфон-риплонного взаимодействия не имеет аналогичной экспоненциальной малости. Однако, константа сюрфон-риплонного взаимодействия по прежнему оказывается малой из-за малости смещения поверхности, вызываемое одним риплоном.

Чтобы исследовать испарение сюрфонов, вызванное взаимодействием с риплонами, мы используем такой же подход, как и в теории взаимодействия с риплонами электронов на поверхности жидкого гелия (см. параграф 9 в монографии [1]). Так, в адиабатическом пределе, когда риплоны длиноволновые и волновая функция сюрфона успевает подстроиться под локальное искривление поверхности, недиагональные матричные элементы сюрфон-риплонного взаимодействия совпадают с матричными элементами оператора

$$\hat{V} = \delta H - \hbar k_z \dot{\xi}, \tag{4.1}$$

взятыми по невозмущенным состояниям системы $|l, \mathbf{k}, \mathbf{n}>$. Здесь индекс l нумерует квантовые уровни сюрфона вдоль оси z (один дискретный уровень и весь набор непрерывного спектра, определяемый волновым числом k_z), $\mathbf{k}$ - волновой вектор сюрфона вдоль плоскости, $\mathbf{n}$ - индекс, характеризующий риплонную систему. Для однориплонных процессов рассеяния $\mathbf{n}$ является волновым вектром риплона. В потенциале (4.1) оператор $k_z = -i\partial/\partial z$,

$$\delta H = \delta V_s + \delta K_s. \tag{4.2}$$

Поправка к оператору кинетической энергии сюрфона

$$\delta K_s = -\frac{\hbar^2}{M_{He}} k_z (\mathbf{k}\nabla\xi), \tag{4.3}$$

а изменение потенциальной энергии сюрфона из-за риплона

$$\delta V_s(\mathbf{r}, z) = n_{He} \int d^2\mathbf{r_1} [\xi(\mathbf{r_1}) - \xi(\mathbf{r})] V_{LJ} \left(\sqrt{(\mathbf{r_1} - \mathbf{r})^2 + z^2} \right). \tag{4.4}$$

Для риплона с импульсом $\mathbf{q}$ деформация поверхности дается выражением

$$\xi(\mathbf{r}) = \xi_{0q} \cos(\mathbf{qr} - \omega t), \tag{4.5}$$

где амплитуда риплона, нормированная на один риплон на поверхности площади S

$$\xi_{0q} = \left(\frac{\hbar}{2S\sqrt{\rho_{He}\alpha q}} \right)^{1/2}, \tag{4.6}$$

где ρ_{He} – массовая плотность гелия. Положив $S = 1$ и подставляя константы, для гелия 4 получаем значение

$$\xi_{0q} \approx 5q^{-1/4} \cdot 10^{-8}\mathring{A}, \tag{4.7}$$

где q измеряется в Å. Таким образом амплитуда волны, состоящей из одного кванта (риплона) оказывается очень малой. Однако, при оценки влияния рассеяния на риплонах, эта малость может быть скомпенсирована большим числом квантовых состояний риплонов.

Положив за начало отсчета положение сюрфона $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, из (4.5) получаем

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{r}_1) - \xi(\mathbf{r}) &= \xi_0 \left[\cos\left(\mathbf{q}\mathbf{r}_1 + \omega t\right) - \cos\left(\omega t\right) \right] \\ &= \xi_0 \left[\cos\left(\mathbf{q}\mathbf{r}_1\right)\cos\left(\omega t\right) - \cos\left(\omega t\right) - \sin\left(\mathbf{q}\mathbf{r}_1\right)\sin\left(\omega t\right) \right]. \end{aligned}$$

Последний член в квадратных скобках после интегрирования в (4.4) дает ноль в силу нечетности подынтегрального выражения, и мы получаем

$$\xi(\mathbf{r}_1) - \xi(\mathbf{r}) = \xi_0 \cos\left(\omega t\right) \left[\cos\left(\mathbf{q}\mathbf{r}_1\right) - 1 \right]. \tag{4.8}$$

Интегрирование в (4.4) проще осуществить, направив импульс риплона вдоль оси x. Поскольку, мы всегда можем выбрать волновой вектор риплона за ось x, то это не уменьшает общности результата. Подставляя потенциал Леннарда-Джонса в (4.4) и интегрируя сначала по y, получаем

$$\begin{aligned} \delta V_q(z) &= 4\epsilon_0 n_{He}\xi_0 \cos\left(\omega t\right) \int dx_1 dy_1 \left[\cos\left(qx_1\right) - 1 \right] \\ &\quad \times \left[\left(\frac{\sigma_0^2}{x_1^2 + y_1^2 + z^2} \right)^6 - \left(\frac{\sigma_0^2}{x_1^2 + y_1^2 + z^2} \right)^3 \right] \\ &= 4\epsilon_0 n_{He}\xi_0 \cos\left(\omega t\right) \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \left[\cos\left(qx_1\right) - 1 \right] \\ &\quad \times \left[\left(\frac{\sigma_0^2}{x_1^2 + y_1^2 + z^2} \right)^6 - \left(\frac{\sigma_0^2}{x_1^2 + y_1^2 + z^2} \right)^3 \right] \\ &= 4\epsilon_0 n_{He}\xi_0\sigma_0 \cos\left(\omega t\right) \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \left[\cos\left(qx_1\right) - 1 \right] \\ &\quad \times \left[\frac{63\pi}{256} \left(\frac{\sigma_0^2}{x_1^2 + z^2} \right)^{11/2} - \frac{3\pi}{8} \left(\frac{\sigma_0^2}{x_1^2 + z^2} \right)^{5/2} \right] \\ &= 4\pi\epsilon_0 n_{He}\xi_0\sigma_0^2 \cos\left(\omega t\right) f(q, z) \end{aligned} \tag{4.9}$$

где безразметрная функция

$$f(q,z) \equiv \left(\frac{q^5 K_5(qz)}{1920 z^5} - \frac{1}{5z^{10}} \right) \sigma_0^{10} + \left(\frac{q^2 K_2(qz)}{4z^2} - \frac{1}{2z^4} \right) \sigma_0^4 \tag{4.10}$$

Здесь $K_n(qz)$ - модифицированная функция Бесселя порядка n. Разности в круглых скобках в функции (4.10) устроены так, что главный расходящийся член при $z \to 0$ сокращается. Такое же сокращение происходит и в задаче о потенциале взаимодействия поверхностных электронов с риплонами (см. формулу 9.14 из монографии [1]). Разложение по q при малых $q \ll 1/z$ функции (4.10) начинается с члена q^2. Для длинноволновых риплонов это основной вклад, и только длинноволновые риплоны выживают при низких температурах. Поэтому выпишем разложение для (4.10) с точностью до q^2:

$$f_{qz \ll 1}(q,z) \approx q^2 \left[\frac{\sigma_0^{10}}{80 z^8} - \frac{\sigma_0^4}{8z^2} \right]. \tag{4.11}$$

При $qz \gg 1$ функция (4.10) стремится к конечному пределу:

$$f(q,z) \to \frac{5z^6 + 2\sigma_0^6}{10 z^{10}} \sigma_0^4. \tag{4.12}$$

Поэтому более точную аппроксимацию функции (4.10) дает формула

$$f(q,z) \approx \left[\frac{\sigma_0^{10}}{80 z^8} - \frac{\sigma_0^4}{8z^2} \right] \frac{q^2}{1 + q^2 z^3 / 8\sigma_0}. \tag{4.13}$$

Графики зависимости функций (4.10),(4.11) и (4.13) от q при $z = z_0$ представлены на рис. 4.1. Видно, что аппроксимация (4.13) несравнимо лучше формулы (4.11). При большем значении z формула (4.11) дает совсем плохое приближение при $qz > 1$. Графики зависимости функций (4.10),(4.11) и (4.13) от q при $z = 4z_0$ представлены на рис. 4.2. В то время как разница между точной формулой (4.10) и приближенной формулой (4.13) не различима на глаз, разница между (4.10) и (4.13) составляет более одного порядка при $q > 1 \mathring{A}^{-1}$.

Полный гамильтониан взаимодействия сюрфона с риплонами записывается в виде

$$\hat{V} = \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega_q t} \left[\delta V_q(z) - \xi_{0q} \left(\frac{\hbar^2 (\mathbf{k}_\parallel \mathbf{q})}{M_{He}} - \hbar\omega_q \right) \frac{\partial}{\partial z} \right]. \tag{4.14}$$

Это выражение для оператора сюрфон-риплонного взаимодействия в адиабатическом пределе может быть использован для различных физических задач, связанных с рассеянием сюрфонов на риплонах: определение времени испарения сюрфона из-за взаимодействия с риплонами, расчет подвижности сюрфонов, и др.

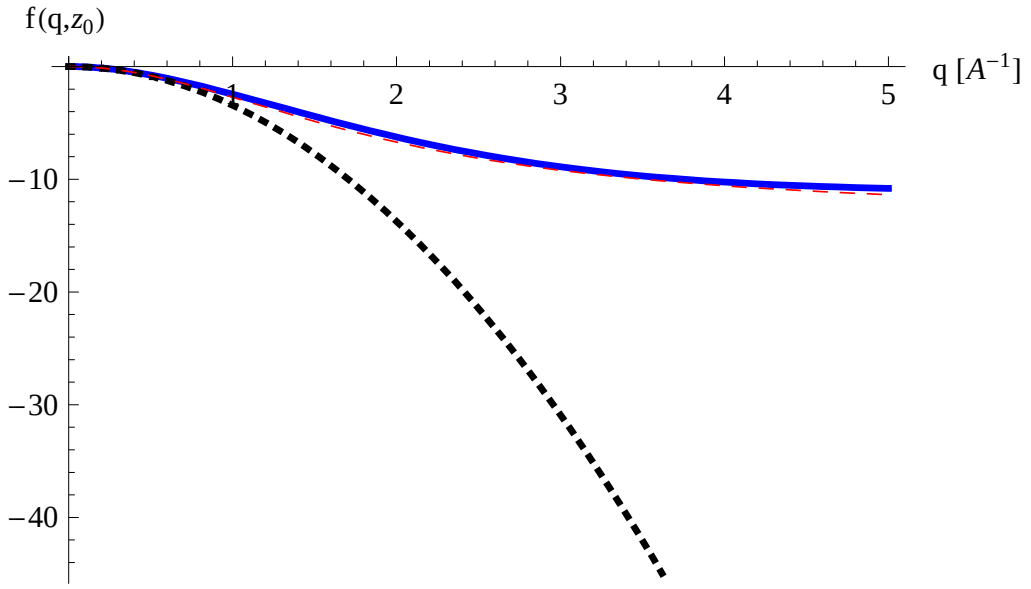


Рис. 4.1: Графики зависимости функций (4.10),(4.11) и (4.13) от q при $z = z_0$. Синяя сплошная линия - точная функция (4.10). Черная точечная линия - результат аппроксимирующей формулы (4.11). Видно, чта формула аппрксимирует точную лишь при $qz \ll 1$. Красная пунктирная линия - результат более точной аппроксимирующей формулы (4.13), которая хорошо приближается к точной зависимости при всех q.

4.1 Волновые функции сюрфонов и атомов пара

Для вычисления матричных элементов для потенциала взаимодействия (4.14) между дискретеным уровнем атома гелия (сюрфоном) и состояниями непрерывного спектра (паром гелия) прежде всего необходим явный вид волновых функций. Численное решение уравнения Шредингера в потенциале (2.2) в принципе позволяет найти волновые функции сюрфона, но решение дифференциального уравнения для волновых функций на каждом шаге интегрирования при вычислении матричного элемента, с последующим интегрированием квадрата матричного элемента при вычислении времени испарения сюрфона, оказывается довольно трудоемким вычислением даже для современных компьютеров. Кроме того, полностью численный расчет не укажет на особенности задачи также явно, как аналитические выражения. Поэтому, для оценки выберем следующий приближенный вид волновой функции атома гелия на дискретном уровне, которая как и точная волновая функция экспоненциально спадает при $z \to \infty$ и обращается в нуль перед самой границей жидкость-пар из-за короткодействующего отталкивания между атомами гелия:

$$\psi_0(z) \approx \kappa^2 (z - z_0) \exp\left(-\kappa (z - z_0)\right), \ \kappa \equiv \sqrt{2 M_{He} E_{s0}^{He} / \hbar^2}. \tag{4.15}$$

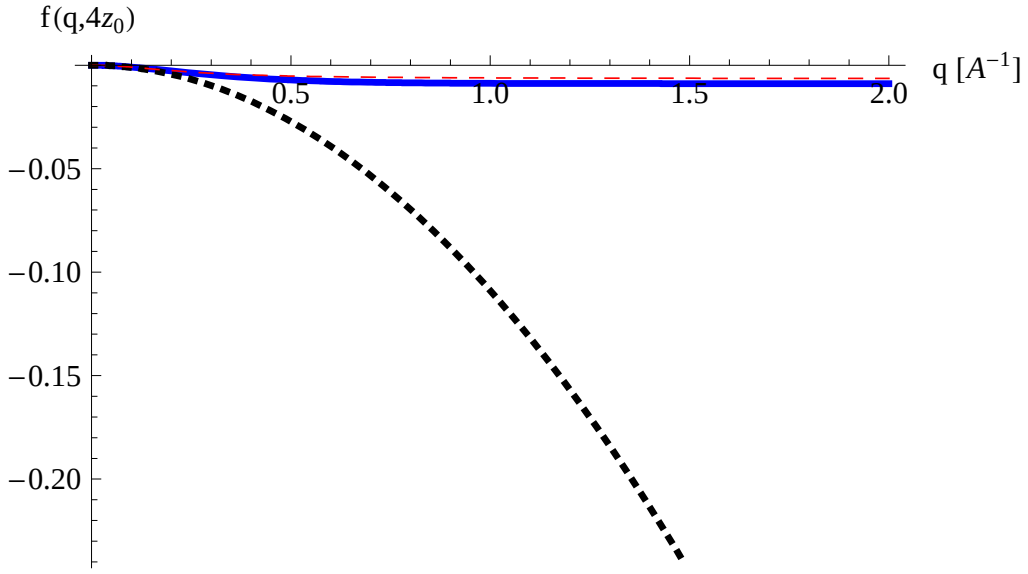


Рис. 4.2: Графики зависимости функций (4.10),(4.11) и (4.13) от q при $z = 4z_0$. Синяя сплошная линия - точная функция (4.10). Черная точечная линия - результат аппроксимирующей формулы (4.11). Видно, чта формула аппрксимирует точную лишь при $qz \ll 1$. Красная пунктирная линия - результат более точной аппроксимирующей формулы (4.13), которая хорошо приближается к точной зависимости при всех q.

Здесь E_{s0}^{He} – энергия атомов на дискретном уровне, значение которой для изотопов гелия дается формулой (1.12), $z_0 \approx 1.75A$ – расстояние от поверхности, на котором волновая функция сюрфона спадает практически до нуля. Подставляя значения энергии для ^4He и ^3He, получаем $\kappa^{He4} \approx (1.15\text{Å})^{-1}$ и $\kappa^{He3} \approx (1.87\text{Å})^{-1}$.

Волновые функции непрерывного спектра, также обращающиеся в ноль на границе $z = z_0$, выберем в виде плоских волн, нормированных на единицу на единичной длине $l = 1$ вдоль оси z:

$$\psi_k(z) = \sqrt{2/l}\sin[k(z - z_0)] - \lambda_k \psi_0(z), \tag{4.16}$$

где множитель λ_k выбран таким образом, чтобы волновые функции ψ_k были ортогональны ψ_0:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \int \psi_0^*(z)\,\psi_k(z)\,dz \\ &\approx \int_{z_0}^{\infty} \sqrt{2/l}\kappa^{3/2}\sin[k(z - z_0)](z - z_0)\exp\left[-\kappa(z - z_0)\right]dz \\ &= \frac{2\sqrt{2/l}\kappa^{5/2}k}{(\kappa^2 + k^2)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\kappa l}} \ll 1. \end{aligned} \tag{4.17}$$

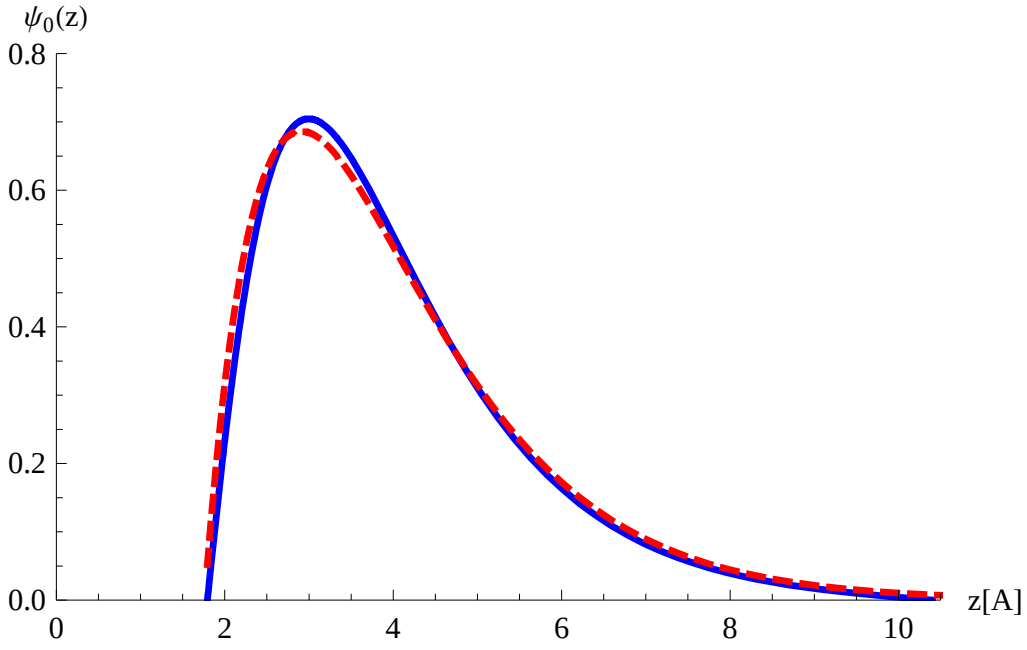


Рис. 4.3: Волновая функция сюрфона $\psi_0(z)$ вдоль оси z, вычисленная из точного решения уравнения Шредингера для атома ^{4}He в потенциале (2.2) (сплошная синяя линия), и приближенный вид волновой функции сюрфона (пунктирная красная линия), данный формулой (4.15). Видно, что формула (4.15) дает очень хорошее приближение для волновой функции сюрфона на нижнем уровне.

Поскольку $\lambda_k \ll 1$, все недиагональные матричные элементы (кроме тех, где главный член зануляется) могут быть вычислены по упрощенным функциям

$$\psi_k(z) = \sqrt{2/l}\sin[k(z - z_0)]. \tag{4.18}$$

Вдоль плоскости поверхности, волновые функции сюрфонов и атомов пара могут быть выбраны в виде плоских волн:

$$\psi(\mathbf{r}_\parallel) = \exp(i\mathbf{k}_\parallel\mathbf{r}_\parallel). \tag{4.19}$$

4.2 Вычисление матричных элементов сюрфон-риплонного взаимодействия

Вычислим теперь недиагональные матричные элементы V_{0k} оператора (4.14) в базисе (4.15),(4.18). Матричные элементы оператора импульса $p_z = -i\hbar\partial/\partial z$ равны

$$\begin{aligned} & \int \psi_0^*(z) \frac{-i\hbar\partial}{\partial z} \psi_k(z)\, dz \\ = \; & \hbar k \int_{z_0}^{\infty} \sqrt{2/l}\kappa^{3/2} \cos[k(z-z_0)](z-z_0) \exp\left[-\kappa(z-z_0)\right] dz \\ = \; & \frac{2\sqrt{2/l}\hbar k\kappa^{3/2}\left(\kappa^2-k^2\right)}{\left(\kappa^2+k^2\right)^2}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Матричные элементы потенциала (4.9) с приближенной функцией (4.13) записываются в виде

$$\delta V_{qk0} \approx 4\pi\epsilon_0 n_{He}\xi_{0q}\cos(\omega_q t)\int_{z0}^{\infty} dz\psi_0^*(z)\,\psi_k(z)\left[\frac{\sigma_0^{12}}{80z^8}-\frac{\sigma_0^6}{8z^2}\right]\frac{q^2}{1+q^2z^3/8\sigma_0} \tag{4.21}$$

Самая сильная зависимость от z в матричном элементе потенциала (4.9) происходит от множителя

$$\left[\frac{\sigma_0^{12}}{80z^8}-\frac{\sigma_0^6}{8z^2}\right]$$

Поэтому в оставшемся зависящем от z множителе можно заменить z^3 на среднее значение $< z^3 > \approx 60\mathring{A}^3$:

$$\frac{q^2}{1+q^2z^3/8\sigma_0} \approx \frac{q^2}{1+q^2 < z^3 > /8\sigma_0}.$$

Теперь интеграл существенно упрощается и выражается через спец. функцию, зависящую только от одного аргумента k:

$$\begin{aligned} \delta V_{qk0} \; \approx \; & 4\pi\epsilon_0 n_{He}\xi_{0q}\cos(\omega_q t)\frac{q^2\kappa^{3/2}\sqrt{2/l}}{1+q^2 < z^3 > /8\sigma_0} \\ & \times \int_{z0}^{\infty} dz \sin[k(z-z_0)](z-z_0)\exp\left[-\kappa(z-z_0)\right]\left[\frac{\sigma_0^{12}}{80z^8}-\frac{\sigma_0^6}{8z^2}\right] \\ = \; & V_{qt0}\int_0^{\infty} dz\sin(kz)z\exp(-\kappa z)\left[\frac{\sigma_0^6}{80\left(z+z_0\right)^8}-\frac{1}{8\left(z+z_0\right)^2}\right]. \end{aligned} \tag{4.22}$$

В последней строке введена амплитуда матричного элемента, зависящая только от волнового числа риплона q и от параметров основного состояния сюрфона:

$$V_{qt0} \equiv 4\pi\epsilon_0 n_{He}\sigma_0^6\kappa^{3/2}\sqrt{2/l}\cos(\omega_q t)\,\xi_{0q}\frac{q^2}{1+q^2 < z^3 > /8\sigma_0}. \tag{4.23}$$

Эта амплитуда для перехода из основного состояния сюрфона в непрерывный спектр имеет размерность энергии и характеризует силу взаимодействия сюрфона с одним риплоном. Если нормировать сюрфон на единицу площади, а непрерывный спектр на единицу длины (1см), то подстановка констант в (4.23) дает следующее значение для V_{qt0}, где энергия измеряется в K, а волновой вектор в $\mathring{A}$:

$$V_{qt0}^{He4} \approx 4.3 \cdot 10^{-9}[K]\frac{q^{7/4}}{1+3q^2}[\mathring{A}]\cos(\omega_q t)\,. \tag{4.24}$$

График зависимости безразмерного интеграла (4.22) от волнового числа k, характеризующего состояния непрерывного спектра, при $\kappa = (1.15\mathring{A})^{-1}$ и $z_0 \approx 1.75A$ представлен на Рис. 4.4.

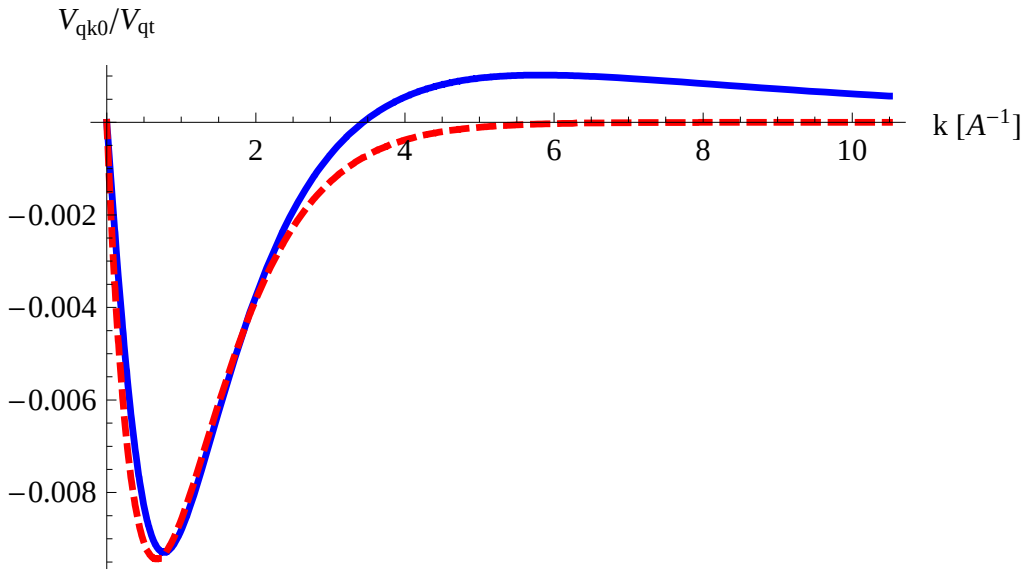


Рис. 4.4: График зависимости матричного элемента δV_{qk0} от импульса атома в состоянии непрерывного спектра. Сплошная синяя линия - результат численного интегрирования выражения (4.22). Максимум абсолютной величины (минимум функции) δV_{qk0} при $k \approx 1\mathring{A}^{-1}$ связан в основном с притяжением в потенциале Леннарда-Джонса. Другой максимум при $k \approx 6\mathring{A}^{-1}$, связанный с отталкиванием на коротком расстоянии, не играет существенной роли, поскольку у атома гелия не достаточно энергии для таких больших k. Пунктирная красная линия на графике - это функция $f(k) = -(k/26)e^{-1.5k}$, дающая неплохую аппроксимацию матричного элемента при волновом векторе непрерывного спектра $k < (1\mathring{A})^{-1}$, куда испаряется сюрфон с наибольшей вероятностью.

Для дальнейшего вычисления времени испарения сюрфона мы воспользуемя аппрок-

симирующей формулой

$$\delta V_{qk0} = -V_{qt0}(k/26)e^{-1.5k}, \tag{4.25}$$

дающей достаточное согласие с точной функцией (см. Рис. 4.4), где значение V_{qt0} для гелия 4 дается формулой (4.24).

Гамильтониан сюрфон-риплонного взаимодействия состоит из двух частей - поправкам к потенциальной и кинетической энергии сюрфона:

$$\hat{V}_{q0k} = \delta V_{q0k} - K_{q0k}$$

Матричный элемент кинетической части сюрфон-риплонного взаимодействия дается выражением

$$\begin{aligned} K_{q0k} &= \xi_{0q}\left(\frac{\hbar^2(\mathbf{k}_\parallel \mathbf{q})}{M_{He}} - \hbar\omega_q\right)\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{q0k} \\ &= \xi_{0q}\left(\frac{\hbar^2(\mathbf{k}_\parallel \mathbf{q})}{M_{He}} - \hbar\omega_q\right)\frac{2\sqrt{2/l}k\kappa^{3/2}\left(\kappa^2 - k^2\right)}{\left(\kappa^2 + k^2\right)^2} \\ &\lesssim 5\cdot 10^{-8}E_s^{He4}2\sqrt{2/l\kappa} \approx 7\cdot 10^{-11}[K]. \end{aligned}$$

Этот матричный элемент на 1-2 порядка меньше матричного элемента (4.25), связанного с поправкой к потенциальной энергии. Поэтому в дальнейшем мы будем учитывать только потенциальную часть (4.25) сюрфон-риплонного взаимодействия.

4.3 Оценка времени испарения сюрфона

Вероятность перехода в единицу времени между двумя состояниями непрерывного спектра дается выражением[39]

$$\begin{aligned} w_{if}\left(\mathbf{k}_{\parallel i}\right) &= \frac{2\pi}{\hbar}\int d\nu_i d\nu_f \left|V_{kq}\right|^2 \delta\left(E_f - E_i - \hbar\omega_q\right) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar}\int \frac{Sd^2\mathbf{q}}{\left(2\pi\right)^2} n_B\left(\omega_q\right)\int \frac{ldk_z}{2\pi}\left|V_{kq}\right|^2 \\ &\quad \times\delta\left(\frac{\hbar^2\left(\mathbf{k}_{\parallel i} + \mathbf{q}\right)^2}{2M_4^0} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2M_4^0} - \frac{\hbar^2\mathbf{k}_{\parallel i}^2}{2M_4^0} + \left|E_s^{He4}\right| - \hbar\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}q^{3/2}\right) \end{aligned}$$

Здесь, для упрощения, мы взяли массу сюрфона равной массе свободного атома, что не должно существенно менять величину времени испарения сюрфона.

Интегрирование по импульсу риплона $\mathbf{q}$ удобно осуществлять в полярных координатах:

$$\begin{aligned} w_{if}\left(k_{\|i}\right) &= \frac{\pi}{\hbar}\int_{-\pi}^{\pi}d\phi\int_{0}^{\infty}\frac{Sd\left(q^{2}\right)}{\left(2\pi\right)^{2}}n_{B}\left(\omega_{q}\right)\int\frac{ldk_{z}}{2\pi}\left|V_{kq}\right|^{2} \\ &\times\delta\left[\frac{\hbar^{2}}{2M_{4}^{0}}\left(q^{2}+2k_{\|i}q\cos\phi+k_{z}^{2}\right)+\left|E_{s}^{He4}\right|-\hbar\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}q^{3/2}\right] \end{aligned} \tag{4.26}$$

Условие сохранения энергии, учитываемое δ-функцией приводит к условию на угол между импульсами сюрфона и риплона ϕ:

$$\frac{\hbar^{2}k_{\|i}q\cos\phi}{M_{4}^{0}}+\frac{\hbar^{2}\left(q^{2}+k_{z}^{2}\right)}{2M_{4}^{0}}+\left|E_{s}^{He4}\right|-\hbar\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}q^{3/2}=0,$$

которое определяет этот угол через абсолютные величины импульсов сюрфона и риплона:

$$\cos\phi_{0}=\frac{1}{k_{\|i}q}\left(\frac{M_{4}^{0}}{\hbar}\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}q^{3/2}-\frac{\left(q^{2}+k_{z}^{2}\right)}{2}-\frac{M_{4}^{0}\left|E_{s}^{He4}\right|}{\hbar^{2}}\right).$$

Интегрируя по углу $d\phi$ δ-функцию в выражении (4.26) и подставляя

$$\sin\phi_{0}=\frac{1}{k_{\|i}q}\sqrt{\left(k_{\|i}q\right)^{2}-\left(\frac{M_{4}^{0}}{\hbar}\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}q^{3/2}-\frac{\left(q^{2}+k_{z}^{2}\right)}{2}-\frac{M_{4}^{0}\left|E_{s}^{He4}\right|}{\hbar^{2}}\right)^{2}}$$

получаем

$$\begin{aligned} w_{if}\left(k_{\|i}\right) &= \frac{2\pi}{\hbar}\int_{0}^{\infty}\frac{Sd\left(q^{2}\right)}{\left(2\pi\right)^{2}}n_{B}\left(\omega_{q}\right)\int\frac{ldk_{z}}{2\pi}\frac{\left|V_{kq}\right|^{2}2M_{4}^{0}}{\hbar^{2}2k_{\|i}q\ \left|\sin\phi_{0}\right|} \\ &= \frac{2\pi}{\hbar}\int_{0}^{\infty}\frac{Sd\left(q^{2}\right)}{\left(2\pi\right)^{2}}n_{B}\left(\omega_{q}\right)\int\frac{ldk_{z}}{2\pi} \\ &\times\frac{\left|V_{kq}\right|^{2}2M_{4}^{0}}{\hbar^{2}2\sqrt{\left(k_{\|i}q\right)^{2}-\left(\frac{M_{4}^{0}}{\hbar}\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}q^{3/2}-\frac{\left(q^{2}+k_{z}^{2}\right)}{2}-\frac{M_{4}^{0}\left|E_{s}^{He4}\right|}{\hbar^{2}}\right)^{2}}}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

От k_z сильнее всего зависит матричный элемент V_{kq}, график которого изображен на Рис. 4.4. Более слабая зависимость от k_z имеется в подкоренном выражении в (4.27), возникающем из-за закона сохранения энергии. Для приближенного расчета мы заменим в подкоренном выражении в (4.27) k_z^2 на среднее значение $\langle k_z^2\rangle \approx 1\mathring{A}^{-2}$. Тогда один двумерный интеграл сводится к двум одномерным:

$$w_{if}\left(k_{\|i}\right)\approx\frac{1}{\hbar^{3}}\int_{0}^{\infty}\frac{Sd\left(q^{2}\right)}{\left(2\pi\right)^{2}}\frac{M_{4}^{0}n_{B}\left(\omega_{q}\right)\int ldk_{z}\left|V_{kq}\right|^{2}}{\sqrt{\left(k_{\|i}q\right)^{2}-\left(\frac{M_{4}^{0}}{\hbar}\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}q^{3/2}-\frac{q^{2}}{2}-\frac{\langle k_{z}^{2}\rangle}{2}-\frac{M_{4}^{0}\left|E_{s}^{He4}\right|}{\hbar^{2}}\right)^{2}}}$$

Первый интеграл

$$\int ldk_z \left|V_{kq}\right|^2 \approx 2V_{qt0}^2 10^8 \int_0^\infty dk_z \left|(k_z/26)e^{-1.5k_z}\right|^2 = 2.2 \cdot 10^5 \cdot V_{qt0}^2.$$

Последний интеграл мы вычисляем численно, подставляя значения констант:

$$\begin{aligned} w_{if}\left(k_{\|i}\right) &\approx \frac{10^{16}}{\hbar^3}\int_0^\infty \frac{d\left(q^2\right)}{\left(2\pi\right)^2}\frac{1}{\exp\left(-\frac{\hbar}{k_B T}\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}q^{3/2}\right)-1} \\ &\times\frac{2.2\cdot 10^5 \cdot M_4^0 \cdot V_{qt0}^2}{\sqrt{\left(k_{\|i}q\right)^2-\left(\frac{M_4^0}{\hbar}\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}q^{3/2}-\frac{q^2}{2}-\frac{M_4^0\left|E_s^{He4}\right|}{\hbar^2}\right)^2}} \\ &\approx \frac{1.38}{\hbar}\int_0^\infty \frac{d\left(q^2\right)}{\left(2\pi\right)^2}\frac{\left(4.5\cdot 10^{-9}\right)^2}{\exp\left(-\frac{11.8}{T}q^{3/2}\right)-1}\frac{q^{7/2}}{\left(1+3q^2\right)^2} \\ &\times\frac{2.2\cdot 10^5/12}{\sqrt{\left(k_{\|i}q\right)^2-\left(q^{3/2}-\frac{q^2}{2}-\frac{1}{2}-0.615^2\right)^2}} \end{aligned}$$

Окончательное выражение для численного интегрирования

$$\begin{aligned} w_{if}^{He4}\left(k_{\|i}\right) &\approx 1.22\cdot 10^{13}\int_0^\infty \frac{d\left(q^2\right)}{\exp\left(-\frac{11.8}{T}q^{3/2}\right)-1}\frac{q^{7/2}}{\left(1+3q^2\right)^2} \\ &\times\frac{1}{\sqrt{\left(k_{\|i}q\right)^2-\left(q^{3/2}-\frac{q^2}{2}-\frac{1}{2}-0.615^2\right)^2}} \end{aligned} \tag{4.28}$$

Этот интеграл сильно зависит как от импульса сюрфона вдоль плоскости, так и от температуры. График зависимости интеграла от импульса сюрфона при $T = 1.5K$ представлен на рис. 4.5. Видно, что существенное испарение испытывают только быстрые (горячие) сюрфоны, конценрация которых быстро спадает при понижении температуры. Сюрфоны с энергией $\hbar^2 k_{\|i}^2/2M_4^0 \approx T = 1.5K$ имеют волновой вектор $k_{\|i} \approx 0.36\mathring{A}^{-1}$. При таком $k_{\|i}$ величина скорости испарения, как видно из рис. 4.5, равна

$$w_{if}^{He4} \approx 3\cdot 10^8, \tag{4.29}$$

что соответствует ширине уровня сюрфона

$$\Gamma = \hbar w_{if}^{He4} \approx 3\cdot 10^{-19} erg = 0.0022K. \tag{4.30}$$

Это намного меньше характерной энергии сюрфона, поэтому сюрфоны можно считать квазичастицами, или возбуждениями на поверхности жидкого гелия. Мы получили, что

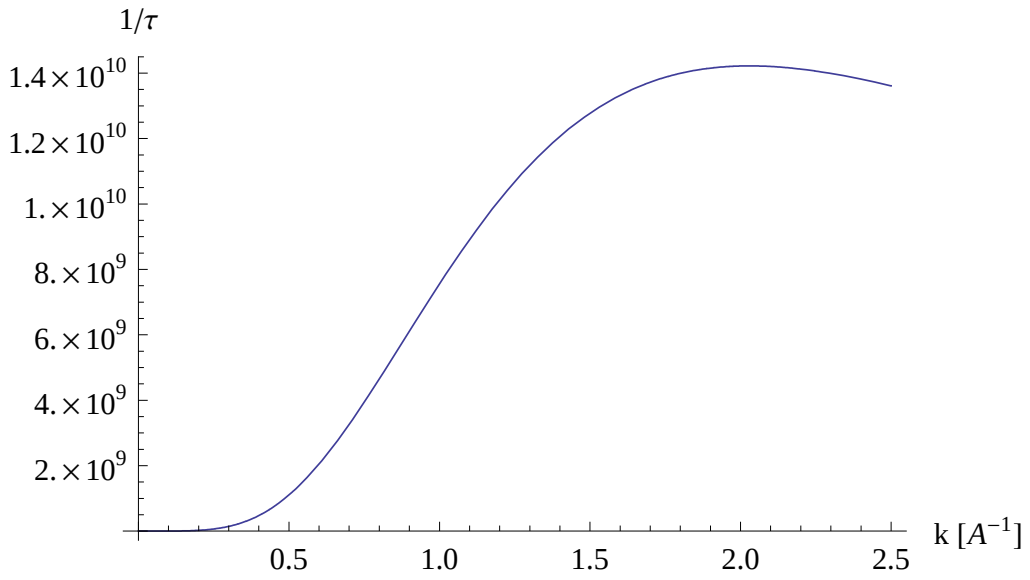


Рис. 4.5: График зависимости скорости испарения сюрфона от его волнового вектора при температуре $T = 1.5$K.

чем горячее сюрфон (чем больше его начальная энергия движения вдоль плоскости), тем он быстрее испаряется, что соответствует здравому смыслу. Следует отметить, что мы получили верхнюю оценку скорости испарения сюрфонов, поскольку мы не учитывали затухание риплонов, связанное с вязкостью жидкости. Это затухание особенно сильно для риплонов с высокой энергией, которые вносят основной вклад в испарение сюрфонов. Поэтому учет затухания риплонов должен дополнительно увеличить время жизни сюрфонов.

График зависимости скорости испарения сюрфона от температуры при фиксированном начальном импульсе $k_{\|i} = 0.5\mathring{A}^{-1}$ (что соответствуе энергии сюрфона $\hbar^2 k_{\|i}^2/2M_4^0 \approx 3K$) представлен на рис. 4.6. Видно, что с повышением температуры скорость испарения сюрфона заметно увеличивается. Однако эта скорость испарения даже при $T = 4K$ не превышает энергии сюрфона, поделенной на $\hbar$. Поэтому даже при столь высокой для жидкого ^{4}He температуре можно считать сюрфоны квазичастицами.

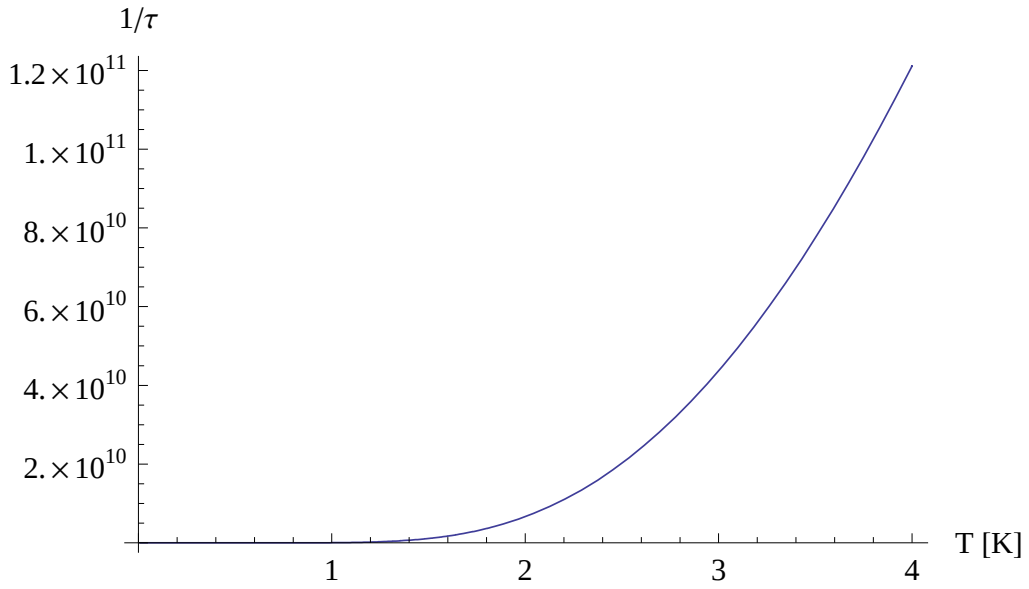


Рис. 4.6: График зависимости скорости испарения сюрфона от температуры при фиксированном начальном импульсе $k_{\|i} = 0.5\mathring{A}^{-1}$ (что соответствуе энергии сюрфона $\hbar^2 k_{\|i}^2 / 2M_4^0 \approx 3K$).

4.4 Обсуждение свойств сюрфонов и их сравнение с численными расчетами

Как было отмечено в разделе 1.8, микроскопические вариационные численные расчеты основного состояния и возбуждений в жидком гелии, активно проводились для бесконечного объема,[18], для полупространства, заполненного жидким гелием [24, 25], и для тонких пленок жидкого гелия [20, 21, 22, 23]. Используемые в этих расчетах приближения были также указаны в разделе 1.8, и некоторые из этих приближений довольно существенны для изучения сюрфонов. Тем не менее, сравнение поверхностных возбуждений, полученных этими приближенными численными расчетами,[18, 20, 21, 22, 23, 24, 25] с полу-феноменологически предложенными сюрфонами [15], подробно изучаемыми в диссертации, является весьма полезным. В работах [20, 21, 22, 23] были исследованы поверхностные состоятния и возбуждения тонкой плёнки гелия, состоящей из нескольких атомных слоёв,а также были найдены несколько типов поверхностных возбуждений плёнки гелия с ненулевой щелью. Анализ потоков частиц и переноса плотности, в дополнении к дисперсионным соотношениям, позволило описать их природу:[23] они были отнесены к риплонной моде на границе гелия с подложкой, и к так называемой "дыхательной моде".

Последняя описывает стоящую волну в направлении перпендикулярном плёнке,[23] подобно объёмным фононам, которые могут распространяться вдоль плёнки. Энергетическая щель этой "дыхательной моды" уменьшается с увеличением толщины плёнки. Таким образом, никакие из возбуждений найденых в работах [20, 21, 22, 23] не могут быть отнесены к сюрфонам. Причина заключается в том что эти расчёты [20, 21, 22, 23] включают только возбуждения внутри жидкости, и пренебрегают паром гелия, а также состояниями над жидким гелием. Это ограничение было устранено в работах [24, 25], где свободная граница между толстой (глубокой) пленкой жидкого гелия и насыщенным паром была исследована в аналогичном численном вариационном подходе, и были получены заметно различные результаты. Этот предел глубокого жидкого гелия, заполняющего полупространство, близок к модели полуфеноменологического описания сюрфонов в диссертации. Опять же, несколько щелевых поверхностных возбуждений были получены в глубоком жидком гелии [24, 25], но структура этих возбуждений полностью отличается от возбуждений в тонких плёнках [20, 21, 22, 23]. Никакие "дыхательные моды " не были обнаружены на поверхности большого объёма гелия,[24, 25] что естественно, так как эта мода размазана по всей толщине плёнки гелия [23], будучи возбуждением в объёме жидкости, и превращается в обычный объемный фонон, движущийся перпендикулярно пленке. Тем не менее, были найдены два новых типа щелевых возбуждений.[24] Первый тип имел большую энергию возбуждения (выше $\Delta_1 \approx 18.5K$) и был интерпретирован как ротон, пойманый участком поверхности.[24] Волновая функция этого возбуждения сосредоточена в основном внутри жидкости гелия (смотрите рисунок 2 работы [24]), и поэтому не может быть интерпретирована как волновая фунция сюрфона. Второй тип щелевых возбуждений , названный в работе [24] резонансным поверхностным состоянием (РПС), имеет структуру и свойства очень похожие на структуру и свойства сюрфона. Во-первых, РПС связаны с пиками плотности гелия над поверхностью жидкости, как показано на рисунке 6 работы [24]. Во-вторых, закон их дисперсии очень похож на закон дисперсии сюрфонов (см. рисунки 7 и 9 в работе [24]): их энергетическая щель $\Delta_2 \approx 1.6K$, и их импульс в горизонтальной плоскости $k_{\|} < 1.5\mathring{A}^{-1}$ они имеют почти квадратное дисперсионное соотношение в уравнении (1.8) с эффективной массой M^* близкой к массе атома гелия $M_4^0 = 6.7 \cdot 10^{-24}$грамм. В третьих, подобно сюрфонам, эти поверхностные возбуждения интерпретируются как атом пара гелия с волновой функцией, имеющей большой пик чуть выше поверхности жидкости [24], образущий связанное состояние на поверхности при нулевой температуре. При конечной температуре эти связанные поверхностные состояния атомов являются квазистационарными уровнями, то есть они имеют малую конечную вероятность стать

делокализованным, подобно испарению сюрфонов при конечной температуре (см. раздел 4.3). Таким образом, мы приходим к выводу, что резонансные поверхностные состояния, получены численно в работе [24], и сюрфоны, предложенные в работе [15], описывают один и тот же тип поверхностных возбуждений используя два различных приближенных подхода.

Глава 5

Нейтроны на поверхности жидкого гелия

5.1 Введение

Медленные нейтроны играют важную роль в физике элементарных частиц низких энергий, как как объект сам по себе в исследованиях свойств свободных нейтронов, так и в качестве инструмента для изучения его взаимодействия с известными или гипотетическими полями с высокой точностью.[68, 69, 70] Особый класс экспериментов использует нейтроны с энергией ниже нейтронного оптического потенциала типичных материалов, т.е. с энергией $E \lesssim 300\text{neV}$. Эти так называемые ультрахолодных нейтронов (УХН) могут быть заключены в ловушку в течение десятков минут в хорошо продуманных "нейтронных бутылках". В силу магнитного момента нейтрона в 60neV/T, магнитный захват нейтронов также осуществим. Гравитационное поле Земли $F = m_n g = 100$ neV/m также может играть существенную роль в хранении и манипуляции УХН.[71, 72]

Недавние эксперименты, указывающие на существование дискретных энергетических уровней УХН в гравитационном потенциале Земли, открывают интересную ветвь физики нейтронов и пролагают путь к использованию гравитационной резонансной спектроскопии для изучения гравитационных сил на малых масштабах длины [46, 47, 48, 49, 50]. Впервые такая система была предложена в 1978[79], однако экспериментально реализована была лишь недавно.[46, 47, 48, 49, 50] В этих экспериментах нейтроны удерживаются над тщательно отполированными зеркалами, которые представляют основную техническую сложность, довольно дороги и служат недолго из-за оседания примесей на поверхности. В этой главе мы изучаем теоретическую возможность удержания ультрахолодных нейтронов

над поверхностью жидкого гелия как альтернативу использования таких зеркал.

Свойства нейтронов на поверхности жидкого гелия в некоторых аспектах похожи на свойства электронов на поверхности жидкого гелия. Двумерный электронный газ на поверхности диэлектрической среды был предметом обширных исследований на протяжении нескольких десятилетий [1, 2, 3]. Вместо силы гравитации для нейтронов, электроны притягиваются к поверхности электрическими силами изображения и оказываются локализованными в направлении перпендикулярном поверхности. Поверхность жидкого гелия не имеет дефектов твёрдых тел (таких как примеси, дислокации, и т. п.) и даёт уникальную возможность получить предельно чистый двумерный электронный газ. Подвижность электронов на поверхности жидкого гелия обычно более чем в тысячу раз превосходит подвижность электронов в квантовых ямах в гетероструктурах. Эта система моделирует двумерные квантовые ямы в твёрдых телах в отсутствии беспорядков. Множество фундаментальных свойств двумерного электронного газа было изучено с помощью электронов на поверхности жидкого гелия. Различные квантовые электронные объекты могут быть экспериментально реализованы на поверхности жидкого гелия, как, например, квантовые точки [53], одномерные электронные нити,[52], квантовые кольца [51], и т. д. Электроны на поверхности жидкого гелия могут также служить для экспериментальной реализации квантовых битов с очень большим временем декогеренции.[4]. Если нейтроны смогут быть задержаны в поверхностных состояниях с достаточной плотностью, мы можем, во-первых, изучать нейтроны и их взаимодействия с высокой точностью, и, во-вторых, надеяться их использовать подобно использованию электронов, и возможно получим новые квантовые состояния вещества.

5.2 Нейтроны над плоской поверхностью гелия.

Потенциал рассеяния нейтронов на атоме ^{4}He с координатой $\boldsymbol{r}_i$ даётся формулой

$$V_i(\boldsymbol{r}) = U\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i) \equiv \frac{2\pi\hbar^2 a}{m_{\mathrm{n}}}\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i), \tag{5.1}$$

где $\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})$ это трёхмерная дельта-функция Дирака. Подстановка длины рассеяния $a = 3.26\cdot 10^{-13}cm$ для нейтрона на атоме ^{4}He и массы нейтрона $m_{\mathrm{n}} = 1.675\cdot 10^{-24}g$ даёт значение $U = 1.36\cdot 10^{-42}erg\cdot cm^3$.

Внутри жидкого гелия нейтрон видит "лес" дельта-функциональных потенциалов с объёмной концентрацией равной концентрации атомов ^{4}He $n_{He}\approx 0.0218\mathring{A}^{-3}$ при $T < 2.5K$.

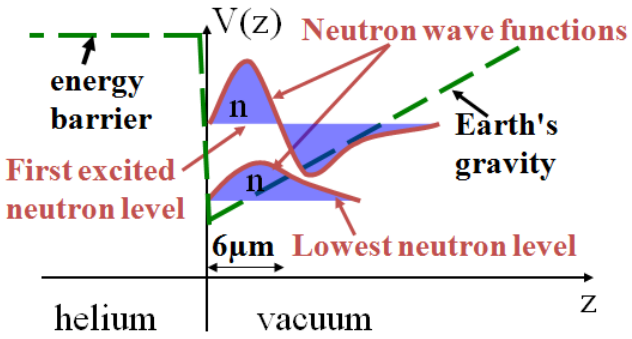


Рис. 5.1: Схематическое изображение вертикального (вдоль оси z) потенциала нейтрона над жидким гелием.

В приближении непрерывной среды внутри жидкого гелия, т. е. при $z < 0$, нейтроны чувствуют постоянный потенциал

$$V_0 = \int d\boldsymbol{r}_i \; n_{He} V_i \left(\boldsymbol{r}\right) = U n_{He} \approx 2.965 \cdot 10^{-20} erg = 18.5 neV. \tag{5.2}$$

Над поверхностью ^{4}He, при $z > 0$, чувствуют только гравитационный потенциал:

$$V\left(z\right) = F\, z \equiv m_{\mathrm{n}} g\, z, \tag{5.3}$$

где $g = 981 cm/s^2$ это ускорение свободного падения (гравитационное ускорение около поверхности Земли), дающее гравитационную силу для нейтрона $m_{\mathrm{n}} g = 1.643 \cdot 10^{-21} erg/cm = 1.026 neV/cm$.

Решим элементарное одномерное уравнение Шредингера для нейтрона находящегося в потенциале определяемом уравнениями Ур. (5.2) и (5.3) и показанном на рисунке 5.1. Соответствующий гамильтониан даётся формулой

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2 \hat{\Delta}}{2 m_{\mathrm{n}}} + m_{\mathrm{n}} g z + V_0 \Theta\left(-z\right), \tag{5.4}$$

где $\hat{\Delta} = \boldsymbol{\nabla}^2$ – это оператор Лапласа и $\boldsymbol{\nabla}$ – это оператор градиента, а $\Theta\left(-z\right) = \{0$ при $z > 0$ и 1 при $z < 0\}$ – функция Хевисайда. Координаты x, y и z разделяются в этом уравнении, и волновая функция нейтрона даётся выражением

$$\psi\left(\boldsymbol{r}\right) = \psi_{\parallel}\left(\boldsymbol{r}_{||}\right) \psi_{\perp}\left(z\right), \tag{5.5}$$

где $\boldsymbol{r}_{||} = (x, y)$ – двумерный координатный вектор вдоль поверхности, в то время как $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ остаётся трёхмерным координатным вектором. В плоскости x-y, волновая функция нейтрона даётся нормированной плоской волной:

$$\psi_{\parallel}\left(\boldsymbol{r}_{||}\right) = S^{-1/2} \exp\left(i \boldsymbol{p}_{||} \boldsymbol{r}_{||} / \hbar\right), \tag{5.6}$$

где S – это площадь поверхности He, а $\boldsymbol{p}_{||}$ – двумерный импульс нейтрона вдоль поверхности. При $z < 0$ мы можем пренебречь слабым гравитационным потенциалом определяемым ур. (5.3) по сравнению с намного более сильной потенциальной стенкой определяемой ур. (5.2), и волновая функция нейтрона вдоль оси zпри $z < 0$ и $E_\perp < V_0$ аппроксимируется как

$$\psi_\perp(z) = \psi_\perp(0)\exp(\kappa z),\ E_\perp < V_0 \tag{5.7}$$

где $\kappa = ik_\perp = \sqrt{2m_\mathrm{n}(V_0 - E_\perp)}/\hbar$ и $E_\perp$ это энергия движения нейтрона вдоль оси z Для $E_\perp \ll V_0$, $\kappa_0 \equiv \sqrt{2m_\mathrm{n}V_0}/\hbar \approx 2.4\cdot 10^5 cm^{-1}$, т. е. глубина проникновения нейтрона в жидкий гелий $\kappa_0^{-1} \approx 33nm$. При $z > 0$, волновая функция нейтрона

$$\psi_\perp(z) = C\,\mathrm{Ai}\left[\left(z - E_\perp/m_\mathrm{n}g\right)/z_0\right], \tag{5.8}$$

где C это нормировочный коэффициент, $\mathrm{Ai}[x]$ - функция Эйри, и характерный масштаб длины для волновой функции нейтрона на дискретном энергетическом уровне при $z > 0$ есть

$$z_0 \equiv \left(\hbar^2/2m_\mathrm{n}^2 g\right)^{1/3} = 5.87\mu m. \tag{5.9}$$

При $z > E_\perp/m_\mathrm{n}g$ функция в уравнении (5.8) падает экспоненциально.

При $E_\perp < V_0$ энергетический спектр по оси движения z квантован. Собственные значения энергии даются граничными условиями при $z = 0$:

$$\frac{\psi'_\perp(0)}{\psi_\perp(0)} = \kappa = \frac{\sqrt{2m_\mathrm{n}(V_0 - E_\perp)}}{\hbar} = \frac{\mathrm{Ai}'\left[-E_\perp/m_\mathrm{n}gz_0\right]}{z_0\mathrm{Ai}\left[-E_\perp/m_\mathrm{n}gz_0\right]}. \tag{5.10}$$

Это уравнение при конечном V_0 решается только численно. Характерная шкала расстояний между нижними уровнями энергии $m_\mathrm{n}gz_0 = \left(\hbar^2 m_\mathrm{n}g^2/2\right)^{1/3} = 0.96\cdot 10^{-24} erg = 0.6 peV$. Для $V_0 \to \infty$ уровни энергии даются формулой

$$E_n = m_\mathrm{n}gz_0\alpha_{n+1},\ n = 0, 1, .., \tag{5.11}$$

где $-\alpha_{n+1}$ нули функции Эйри : $\alpha_1 = 2.338$, $\alpha_2 = 4.088$, $\alpha_3 = 5.521$, $\alpha_4 = 6.787$. Для $n \gg 1$,

$$\alpha_n \approx (3\pi n/2)^{2/3} - \left(\pi^2/96n\right)^{1/3}, \tag{5.12}$$

Эта формула даёт приближение с очень высокой точностью при малых n: для α_1 ошибка $|\Delta\alpha/\alpha| \approx 0.0018$ для $n > 1$. Для α_2 она будет равна $|\Delta\alpha/\alpha| \approx 0.0005$.

Введём безразмерную переменную $u \equiv E_\perp/m_\mathrm{n}gz_0$, тогда Ур. (5.10) запишется как

$$\mathrm{Ai}'[-u] = \mathrm{Ai}[-u]\sqrt{\eta_0 - u}, \tag{5.13}$$

где

$$\eta_0 \equiv V_0/m_{\rm n}gz_0 = 3.078 \cdot 10^4. \tag{5.14}$$

Eqs. (5.13) и (5.14) дают следующие значения $\alpha^{He}_{n+1} = E_n/m_{\rm n}gz_0$ уровней энергии нейтронов над жидким гелием: $\alpha^{He}_1 = 2.332$, $\alpha^{He}_2 = 4.082$, $\alpha^{He}_3 = 5.515$, $\alpha^{He}_4 = 6.781$. Эти значения α^{He}_n очень близки к значениям α_n для $V_0 \to \infty$, так как $\eta_0 \gg 1$. Волновая функция нейтрона над жидким гелием также очень близка волновой к функции при $V_0 \to \infty$ за исключением того что она принимает малое, но конечное значение в нуле $\psi_{\perp n}(z=0) = C_n \,{\rm Ai}\left[-\alpha^{He}_{n+1}\right]$. Для n-го энергетического уровня нормировочный коэффициент определяется выражением

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_n^2} &= \int_0^\infty dz \left|{\rm Ai}\left[z/z_0 - \alpha^{He}_{n+1}\right]\right|^2 + \left|{\rm Ai}\left[-\alpha^{He}_{n+1}\right]\right|^2 \int_{-\infty}^0 dz \exp\left(2\kappa z\right) \\ &= z_0 \int_0^\infty dx \left|{\rm Ai}\left[x - \alpha^{He}_{n+1}\right]\right|^2 + \frac{\left|{\rm Ai}\left[-\alpha^{He}_{n+1}\right]\right|^2}{2\kappa}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Первые нормировочные коэффициенты $C_0 \approx 1.4261/\sqrt{z_0} \approx 59cm^{-1/2}$, $C_1 \approx 51.3cm^{-1/2}$, $C_2 \approx 47.8cm^{-1/2}$, тогда как ${\rm Ai}\left[-\alpha^{He}_1\right] \approx 0.004$, ${\rm Ai}\left[-\alpha^{He}_2\right] \approx -0.0045$, ${\rm Ai}\left[-\alpha^{He}_3\right] \approx 0.0048$. Это даёт $\psi_{\perp 0}(z=0) \approx 0.236cm^{-1/2}$, $\psi_{\perp 1}(z=0) \approx -0.231cm^{-1/2}$, $\psi_{\perp 2}(z=0) \approx 0.23cm^{-1/2}$, и т. д. Эти значения используются позже.

5.3 Рассеяние нейтронов в связанных поверхностных состояниях на атомах пара гелия.

В этом и следующих разделах мы рассмотрим устойчивость (время жизни) нейтрона в поверхностном связанном состоянии, определяемой через два процесса рассеяния: на атомах пара 4He над поверхностью, и на квантах поверхностных волн жидкого гелия, называемых риплонами. Отметим что условия этой задачи рассеяния немного необычны: кинетическая энергия нейтрона в направлении параллельном поверхности может быть на много порядков больше энергии перехода в перпендикулярном направлении.

Атомы пара ^{4}могут быть рассмотрены как точечные примеси с потенциалом взаимодействия даваемым ур. (5.1). Распределение по импульсам атомов пара ^{4}He даётся распределением Бозе,

$$N_p = \exp\left(\frac{\mu_{He} - E_{He}}{k_B T}\right), \tag{5.16}$$

и полная концентрация N_v, даётся интегрированием распределения по импульсам [54]

$$N_v = \left(\frac{M_{He} k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu_{He} - E_{He}}{k_B T}\right), \tag{5.17}$$

где $M_{He} = 6.7 \cdot 10^{-24} g$ атомная масса ^{4}He , константа Больцмана $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16} erg/K$, химический потенциал жидкого ^{4}He $\mu_{He}/k_B = -7.17K$ при $T \to 0$, и кинетическая энергия атомов ^{4}He $E_{He} = \boldsymbol{p}_{He}^2/2M_{He}$. В силу закона сохранения энергии-импульса рассеяние нейтрона определяется начальным состоянием нейтрона и импульсом атома ^{4}He . Положим, что начальное состояние нейтрона определяется нижним энергетическим уровнем вдоль оси z и импульсом $\boldsymbol{p}_{||} = \{p_x, p_y\}$, параллельным поверхности гелия. Соответственно полная энергия нейтрона $K_n = p_{||}^2/2m_{\rm n} + E_n$. Обычно, в экспериментах $K_n \approx p_{||}^2/2m_{\rm n} \sim 10^{-7} eV \gg E_0 \sim 10^{-12} eV$, и начальный импульс $\boldsymbol{p}_{He}$ атома гелия более чем на порядок выше импульса нейтрона, так как средняя кинетическая энергия атома гелия $\bar{E}_{He} = (3/2)\, k_B T \sim 10^{-4} eV$. Ниже (см. ур. (5.29) мы можем увидеть, что при $p_{||} \to 0$ скорость гелий-нейтронного рассеяния w_v остаётся конечной, и мы можем пренебречь $p_{||}/p_{He} \ll 1$ при расчёте этой скорости.

5.3.1 Матричные элементы

Начальная волновая функция нейтрона даётся уравнениями (5.5), (5.6) и (5.8). Поскольку обычно "перпендикулярная плоскости" кинетическая энергия нейтрона после рассеяния на паре гелия много больше чем E_0 и даже чем V_0, конечная волновая функция нейтрона близка к трёхмерной плоской волне с импульсом $\boldsymbol{p}_f$, нормированной на одну частицу во всём обьёме V:

$$\psi_f = \exp\left(i \boldsymbol{p}_f \, \boldsymbol{r}/\hbar\right)/\sqrt{V}. \tag{5.18}$$

Начальная волновая функция гелия $\Psi_{He} = \exp\left(i \boldsymbol{p}_{He} \boldsymbol{r}/\hbar\right)$, конечная волновая функция гелия $\Psi'_{He} = \exp\left(i \boldsymbol{p}'_{He} \boldsymbol{r}/\hbar\right)$. Матричный элемент потенциала взаимодействия (5.1)

$$\begin{aligned} T_{if} &= \int d^3\boldsymbol{r}\, \psi_{\perp 0}\left(z\right) \psi_{\parallel}\left(\boldsymbol{r}_{||}\right) \psi_f\left(\boldsymbol{r}\right) \times \\ &\quad \int d^3\boldsymbol{r}_{\,He} \exp\left[\frac{i\left(\boldsymbol{p}_{He} - \boldsymbol{p}'_{He}\right) \boldsymbol{r}_{He}}{\hbar}\right] U\, \delta^{(3)}\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{He}\right) \\ &= U \int \frac{d^3\boldsymbol{r}_{\,He}}{\sqrt{SV}} \psi_{\perp 0}\left(z_{He}\right) \exp\left(\frac{i \Delta \boldsymbol{p}_{tot}\, \boldsymbol{r}_{He}}{\hbar}\right), \end{aligned} \tag{5.19}$$

где $\Delta \boldsymbol{p}_{tot} \approx \boldsymbol{p}_{He} - \boldsymbol{p}'_{He} + \boldsymbol{p}_{||} - \boldsymbol{p}_f$ – это изменение общего импульса, $\boldsymbol{r}_{He} = \{x_{He}, y_{He}, z_{He}\}$ – это координата ядра He, и $\psi_{\perp 0}\left(z\right) = C_0\, \mathrm{Ai}\left[\left(z - E_0/m_{\rm n} g\right)/z_0\right]$ берётся из уравнения (5.8). Вводя $\tilde{u} \equiv z/z_0$ и выполняя интегрирование по $d^2\boldsymbol{r}_{\,i\parallel}$ в уравнении (5.19) используя тождество

$$\int d^2\boldsymbol{r}_{\,\parallel He} \exp\left(i \Delta \boldsymbol{p}_{\parallel tot}\, \boldsymbol{r}_{\parallel He}/\hbar\right) = \left(2\pi\hbar\right)^2 \delta^{(2)}\left(\Delta \boldsymbol{p}_{||tot}\right), \tag{5.20}$$

мы можем переписать T_{if} как

$$T_{if} = \frac{U\ (2\pi\hbar)^2\,\delta^{(2)}\left(\Delta\boldsymbol{p}_{||tot}\right)}{\sqrt{SV/z_0}} I, \tag{5.21}$$

где оставшийся интеграл

$$I \equiv 1.426 \int_0^\infty d\tilde{u}\ \mathrm{Ai}\left[\tilde{u}-\alpha_1\right] \exp\left(\frac{i\Delta p_z\,\tilde{u}}{\hbar/z_0}\right).$$

Вычислим этот интеграл приближённо, заменяя нормированную функцию Эйри $f\left[\tilde{u}\right] \equiv 1.4261\mathrm{Ai}\left[\tilde{u}-\alpha_1\right]$ более простой, близкой по значениям и также нормированной функцией $f\left[\tilde{u}\right] \approx \exp\left[-\left(\tilde{u}-\tilde{u}_0\right)^2/2\right]/\pi^{1/4}$, где $\tilde{u}_0 \approx 1.5$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty d\tilde{u}\ f\left[\tilde{u}\right] \exp\left(\frac{i\Delta p_z\,\tilde{u}}{\hbar/z_0}\right) \\ &\approx \int_{-\infty}^\infty \frac{d\tilde{u}}{\pi^{1/4}}\ \exp\left[\frac{-\left(\tilde{u}-\tilde{u}_0\right)^2}{2} + \frac{i\Delta p_z\,\tilde{u}}{\hbar/z_0}\right] \\ &= \pi^{1/4}\sqrt{2}\exp\left[\frac{i\Delta p_z\,\tilde{u}_0}{\hbar/z_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta p_z}{\hbar/z_0}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Ниже нам потребуется только квадрат абсолютной величины матричного элемента T_{if}. Квадрат дельта функции в $\left|T_{if}\right|^2$ следует рассматривать как

$$\left[(2\pi\hbar)^2\,\delta^{(2)}\left(\Delta\boldsymbol{p}_{||tot}\right)\right]^2 = S\,(2\pi\hbar)^2\,\delta^{(2)}\left(\Delta\boldsymbol{p}_{||tot}\right), \tag{5.23}$$

потому что это следует из дополнительного интегрирования по координате $\boldsymbol{r}_{i||}$: $\int d^2\boldsymbol{r}_{\,i||} = S$. В самом деле, подставляя уравнение (5.20) в уравнение (5.23) получаем

$$\begin{aligned} &(2\pi\hbar)^2\,\delta^{(2)}\left(\Delta\boldsymbol{p}_{||tot}\right)\int d^2\boldsymbol{r}_{\,i||}\exp\left(\frac{i\Delta\boldsymbol{p}_{\|tot}\,\boldsymbol{r}_{i\|}}{\hbar}\right) = \\ &= (2\pi\hbar)^2\,\delta^{(2)}\left(\Delta\boldsymbol{p}_{||tot}\right)\int d^2\boldsymbol{r}_{\,i||} = S\,(2\pi\hbar)^2\,\delta^{(2)}\left(\Delta\boldsymbol{p}_{||tot}\right). \end{aligned}$$

Подставляя уравнение (5.22) в уравнение (5.21) и используя уравнение (5.23), получаем

$$\left|T_{if}\right|^2 \approx \frac{U^2\ (2\pi\hbar)^3\,\delta^{(2)}\left(\Delta\boldsymbol{p}_{||tot}\right)}{V\sqrt{\pi}\hbar/z_0}\exp\left[-\left(\frac{\Delta p_z}{\hbar/z_0}\right)^2\right].$$

Поскольку $\hbar/z_0 \ll p_{He}$, используя тождество

$$\delta\left(x\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{\epsilon^2}\right)\right]$$

мы можем переписать $\left|T_{if}\right|^2$ как

$$\left|T_{if}\right|^2 \approx U^2\ (2\pi\hbar)^3\,\delta^{(3)}\left(\Delta\boldsymbol{p}_{tot}\right)/V. \tag{5.24}$$

5.3.2 Скорость рассеяния на атомах пара

Скорость рассеяния нейтрона с плоскостной проекцией импульса $\boldsymbol{p}_{||}$ на атоме гелия с начальным импульсом $\mathbf{p}$ даётся квадратом матричного элемента (5.24), проинтегрированным по конечным импульсам $\mathbf{p}'_n$ и $\mathbf{p}'_{He}$ нейтрона и гелия соответственно (золотое правило Ферми):[39]

$$w_{\mathbf{p}} = \frac{2\pi}{\hbar}\int\frac{d^3\mathbf{p}'_{He}}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{Vd^3\mathbf{p}'_n}{(2\pi\hbar)^3}\left|T_{if}\right|^2\delta\left(\varepsilon_i-\varepsilon_f\right). \tag{5.25}$$

Здесь $\varepsilon_i \approx \mathbf{p}^2/2M_{He}$ и $\varepsilon_f = p'^2_{He}/2M_{He} + \left(\mathbf{p}-\mathbf{p}'_{He}\right)^2/2m_{\mathrm{n}}$ – это начальные и конечные полные энергии атома гелия плюс нейтрона, и скорость рассеяния почти не зависит от начального импульса нейтрона $\boldsymbol{p}_{||}$, $w_{\mathbf{p}} \equiv w\left(\boldsymbol{p}_{||},\mathbf{p}\right) \approx w\left(\mathbf{p}\right)$, так как $\boldsymbol{p}_{||} \ll \mathbf{p}$ мы можем пренебречь им в уравнении (5.25). Теперь подставим уравнение (5.24) в уравнение (5.25). Интегрирование по $\mathbf{p}'_n$ сокращает $\delta^3\left(\Delta\boldsymbol{p}_{tot}\right)$ в уравнении (5.24), где $\Delta\boldsymbol{p}_{tot} \approx \mathbf{p}_{He}-\mathbf{p}'_{He}-\mathbf{p}'_n$, и после интегрирования по углу ϕ между $\mathbf{p}_{He}$ и $\mathbf{p}'_{He}$ получаем

$$\begin{aligned} w_{\mathbf{p}} \;=\; & \int\frac{p'^2dp'}{2\pi\hbar^4}\frac{m_{\mathrm{n}}U^2}{pp'}\times \\ & \theta\left[2pp'-\left|p^2\left(1-\frac{m_{\mathrm{n}}}{M_{He}}\right)+p'^2\left(1+\frac{m_{\mathrm{n}}}{M_{He}}\right)\right|\right]. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Используя $M_{He} \approx 4m_{\mathrm{n}}$ в уравнении (5.26) получаем

$$w_{\mathbf{p}} \approx \int\frac{p'^2dp'}{2\pi\hbar^4}\frac{m_{\mathrm{n}}U^2}{pp'}\theta\left[8pp'-3p^2-5p'^2\right]. \tag{5.27}$$

Подынтегральное выражение отлично от нуля когда выполняется неравенство

$$5p'^2-8pp'+3p^2<0. \tag{5.28}$$

Квадратное уравнение имеет два действительных корня:

$$p' = \frac{4}{5}p \pm \sqrt{\left(\frac{4}{5}p\right)^2-\frac{3}{5}p^2} = \frac{p}{5}\left(4\pm1\right),$$

и неравенство (5.28) выполняется при $3/5 < p'/p < 1$. Следовательно, интегрирование p' в уравнении (5.27) проводится между $p_{\min} = 3p/5$ и p:

$$w_{\mathbf{p}} = \int_{3p/5}^{p}\frac{p'dp'}{2\pi\hbar^4}\frac{m_{\mathrm{n}}U^2}{p} = \frac{U^2pm_{\mathrm{n}}}{2\pi\hbar^4}\frac{8}{25}. \tag{5.29}$$

Наконец, для получения общей скорости рассеяния как функции температуры проинтегрируем уравнение (5.29) по начальному импульсу атома гелия $\mathbf{p}$ с весом, даваемым

функцией распределения атома пара гелия N_p в ур. (5.16):

$$\begin{aligned} w_v(T) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}\ N_p}{(2\pi\hbar)^3} w_{\mathbf{p}} \\ &= \int \frac{p^2 dp^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{U^2}{\hbar^4} \frac{8m_{\mathrm{n}}}{25} \exp\left(\frac{\mu_{He} - p^2/2M_{He}}{k_B T}\right). \end{aligned}$$

Вводя новую безразмерную переменную $x \equiv p^2/2M_{He}k_BT$ и выполняя интегрирование, получаем:

$$w_v(T) = \frac{(2M_{He}k_BT)^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{U^2}{\hbar^4} \frac{8m_{\mathrm{n}}}{25} \exp\left(\frac{\mu_{He}}{k_BT}\right). \tag{5.30}$$

После подстановки в уравнение (5.1), используя $M_{He} \approx 4m_{\mathrm{n}}$, мы можем переписать это выражение для скорости рассеяния как

$$w_v(T) = \frac{(k_BT)^2 M_{He} a^2}{\pi\hbar^3} \frac{64}{25} \exp\left(\frac{\mu_{He}}{k_BT}\right) \tag{5.31}$$

$$= 9.44 \cdot T^2[K] \cdot \exp\left(\frac{-7.17}{T[K]}\right). \tag{5.32}$$

При $T = 1K$ мы получим $w_v(T = 1K) \approx 0.007s^{-1} = (138s)^{-1}$. То есть если бы время рассеяния нейтрона на нижнем уровне определялось только паром гелия, то при $T = 1K$ оно составляло бы 2.3 минуты. При понижении температуры эта скорость рассеяния понижается экспоненциально: $w_v(T = 0.8K) \approx 7.74 \cdot 10^{-4}s^{-1} = (21.53\,\mathrm{min})^{-1}$, что соответствует среднему времени рассеяния большему чем время жизни нейтрона из-за β-распада. $w_v(T = 0.7K) \approx 1.6 \cdot 10^{-4}s^{-1}$. Таким образом, время рассеяния поверхностных нейтронов на атомах насыщенного пара гелия превышает собственное время жизни нейтрона при температуре ниже $\approx 0.8K$.

5.4 Рассеяние нейтронов на поверхностных волнах

5.4.1 Общая информация о риплонах.

Квант поверхностной волны с импульсом $\boldsymbol{q}$ вызывает деформацию вдоль оси z , даваемую выражением (4.5). Дисперсионное соотношение для поверхностных волн дается выражением[55, 1] в Ур. (1.4): $\omega_q^2 = (\alpha/\rho_{He})(q^2 + \varkappa^2) q \tanh(qd)$, где $\alpha \approx 0.354\mathrm{dyn/cm}$ это коэффициент поверхностного натяжения ^{4}He, $\rho_{He} \approx 0.145g/cm^3$ его плотность, d глубина гелия, $\varkappa^2 = (g + f)\rho_{He}/\alpha$, дополнительная сила $f \propto d^{-4}$ связана с Ван-дер-Ваальсовским притяжением гелия ко дну и стенкам сосуда, амплитуда риплона ξ_{0q} в уравнении (4.5),

нормированая к одному риплону на еденицу поверхности, даётся в Ур. (4.6).[1, 56, 57] Для сравнительно толстой пленки гелия $\varkappa = \sqrt{g\rho_{He}/\alpha} \approx 20cm^{-1}$. Температурные риплоны с энергией $\hbar\omega_q \approx k_B T \approx 0.5K$ имеют волновое число $q \approx 1.2nm^{-1}$. Для такого волнового числа $q \gg \varkappa$ и $qd \gg 1$. Тогда дисперсионное соотношение для риплонов это просто дисперсионное соотношение для капиллярных волн:

$$\omega_q \approx \sqrt{\alpha/\rho_{He}} q^{3/2}, \tag{5.33}$$

и

$$\xi_{0q} \approx \left(\frac{\hbar}{2S\sqrt{\rho_{He}\alpha q}} \right)^{1/2}. \tag{5.34}$$

5.4.2 Гамильтониан взаимодействия

Для определения влияния периодической деформации поверхности на состояния нейтрона, мы должны разделить два предела. Первый адиабатический предел появляется, когда поверхность колеблется так медленно, что нейтроны на уровне поверхности успевают корректировать свои волновые функции к текущему состоянию поверхности. Потенциал взаимодействия в этом пределе находится в приложении A (B.8), и может быть переписан как

$$\hat{H}_{int} = \xi(\boldsymbol{r}_\parallel, t) \left\{ \left[\frac{\left(\hat{p}_\parallel + \hat{p}_q\right)^2 - \hat{p}_\parallel^2}{2m_\mathrm{n}} - \hbar\omega_q \right] \frac{\partial}{\partial z} + m_\mathrm{n} g \right\}, \tag{5.35}$$

где $\hat{p}_\parallel = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}_\parallel$ и $\hat{p}_q = \hbar q$ это операторы импульса вдоль поверхности для нейтрона и риплона соответственно. Этот член взаимодействия является обобщением уравнения (7) в работе [50], поскольку выводится для зависящего от координат (и времени) возмущения поверхности, а в работе [50] учитывается только зависимость от времени. Выражение в квадратных скобках в формуле (5.35) – это просто передача общей (нейтронной + риплонной) кинетической энергии к конечной кинетической энергии нейтронов вдоль оси z.

Противоположный, *диабатический* или антидиабатический предел появляется когда поверхность колеблется гораздо быстрее, чем характерная частота движения нейтронов перпендикулярно поверхности, так что волновая функция нейтрона не успевает подстроиться под изменение формы поверхности. В этом пределе поверхностные волны влияют на нейтроны создавая дополнительный потенциал

$$V_r(\boldsymbol{r}_\parallel, z) = \begin{cases} V_0, \text{ at } 0 < z < \xi(\boldsymbol{r}_\parallel) \text{ при } \xi(\boldsymbol{r}_\parallel) > 0 \\ -V_0, \xi(\boldsymbol{r}_\parallel) < z < 0 \text{ при } \xi(\boldsymbol{r}_\parallel) < 0 \end{cases} \tag{5.36}$$

Амплитуда риплонов, даваемая уравнением (4.6) или (5.34), для любой разумной поверхности S намного меньше атомных масштабов, и более того, намного меньше характерного масштаба волновой функции нейтрона, равного $\kappa_0^{-1} \approx 33nm$ при $z < 0$. Поэтому потенциал в уравнении (5.36) может быть аппроксимирован как

$$V_r(\mathbf{r}) \equiv V_r(\boldsymbol{r}_\parallel, z) \approx V_0 \xi(\boldsymbol{r}_\parallel) \delta(z) \,. \tag{5.37}$$

5.4.3 Кроссовер между адиабатическим и диабатическим пределами и матричные элементы

Кроссовер между адиабатическим и диабатическим пределами, соответствующий изменению формы риплон-нейтронного гамильтониана взаимодействия от ур. (5.36) к ур. (5.35), должен происходить при уменьшении частоты ω_q и волнового вектора q риплоннов. Оценка частоты кроссовера ω_{qc} и описание системы в режиме кроссовера не тривиальная задача. Аналогичная проблема возникает во многих других системах в физике конденсированного состояния и требует специального теоретического изучения (смотрите, например, статьи [58, 59, 60, 61, 62]). Поскольку нашей целью является не описать этот режим кроссовера, а только примерно оценить время рассеяния нейтронов на риплонах, ниже мы дадим некоторые приблизительные оценки частоты кроссовера ω_{qc}.

Возможная оценка частоты этого кроссовера – это когда частота риплонов становится сопоставимой с квазиклассической частотой колебаний поверхности после удара нейтроном на уровне земли в z-направлении, то есть, когда отношение $\hbar\omega_q/E_0 \sim 1$, где E_0 даётся ур. (5.11). Это соответствует частоте риплона

$$\omega_{qc} \sim E_0/\hbar = 915\,\mathrm{sec}^{-1} \,. \tag{5.38}$$

и волновому числу риплона

$$q_c \approx \left(\omega_{qc}^2 \rho_{He}/\alpha\right)^{1/3} = 70cm^{-1} > \varkappa. \tag{5.39}$$

Такая оценка диабатического-адиабатического кроссовера имеет один существенный недостаток: она не зависит от значения V_0 потенциала нейтрона внутри гелия. Из общих соображений можно ожидать, что для $V_0 \to 0$ и не нулевых q и ω_q нейтрону энергетически выгоднее "потерпеть" малую добавку $V_0 \to 0$ к потенциальной энергии, чем существенно менять волновую функцию и тем самым повышать свою кинетическую энергию, а значит применимо уравнение (5.36) и диабатический предел. Напротив, для $V_0 \to \infty$ выгоднее

поменять волновую функцию, а значит применимо уравнение (5.35). Это рассуждение противоречит уравнению (5.38) и показывает его неприменимость. Классическое определение диабатического-адиабатического кроссовера даётся уравнениями (C.5) и (C.6) в приложении B и имеет тот же недостаток.

Другой критерий кроссовера между диабатическим и адиабатическим пределами – это когда два гамильтониана взаимодействия, даваемые уравнениями Eqs. (5.35) и (5.36), становятся одного порядка величины. Точнее, мы должны сравнить их матричные элементы переходов нейтронов между нижними уровнями вдоль направления оси Z. Таким образом определяемый диабатический-адиабатический кроссовер зависит от величины V_0 и отвечает другим общим требоаниям, таким как адиабатический предел при $\omega_q, q \to 0$. Матричный элемент диабатического потенциала взаимодействия в уравнении (5.37) между двумя нейтронными состояниями с начальными и конечными волновыми функциями (5.5)-(5.8), даётся формулой

$$T_{if} = \int \frac{d^3\boldsymbol{r}}{S} \psi_{\perp i}(z)\, \psi^*_{\perp f}(z) \exp\left(i\boldsymbol{r}_{||} \frac{\boldsymbol{p}_{||} - \boldsymbol{p}'_{||}}{\hbar} \right) V_0 \xi(\boldsymbol{r}_{\parallel}) \delta(z) \,.$$

Здесь интеграл по z сокращает $\delta(z)$, и после подстановки уравнения (4.5) интегрирование по $\boldsymbol{r}_{||}$ даёт $(2\pi\hbar)^2 \delta^{(2)}\left(\Delta\boldsymbol{p}_{||tot}\right)$, где $\Delta\boldsymbol{p}_{||tot} = \hbar q + \boldsymbol{p}_{||} - \boldsymbol{p}'_{||}$ – это изменение общего импульса системы из риплона и нейтрона в горизонтальной плоскости. В результате получаем

$$T_{if} = V_{||} V_{0,n} \,, \tag{5.40}$$

где коэффициент

$$V_{||} = S^{-1} (2\pi\hbar)^2 \delta^{(2)}\left(\Delta\boldsymbol{p}_{||tot}\right) \tag{5.41}$$

приходит из "плоскостной" части $\psi_{\parallel}\left(\boldsymbol{r}_{||}\right)$ волновой функции нейтрона, даваемой уравнениями (5.6), а

$$V_{0,n} = V_0 \xi_{0q} \psi^*_{\perp 0}(0)\, \psi_{\perp n}(0) \tag{5.42}$$

приходит из волновой функции нейтрона $\psi_{\perp}(z)$, перпендикулярной горизонтальной плоскости. Квадрат модуля матричного элемента в уравнении (5.40) даётся выражением

$$|T_{if}|^2 = \frac{(2\pi\hbar)^2 \delta^{(2)}\left(\Delta\boldsymbol{p}_{||tot}\right)}{S} \left| \psi_{\perp i}(0)\, \psi^*_{\perp f}(0)\, V_0 \xi_{0q} \right|^2 , \tag{5.43}$$

где мы снова используем уравнение (5.23).

Матричный элемент адиабатического потенциала взаимодействия в уравнении (5.35) для $\xi(\boldsymbol{r}_{\parallel}, t)$ из Ур. (4.5) даётся уравнением

$$\hat{H}_{k,n} = V_{||} \xi_{0q} \left(E_k - E_n\right) Q_{kn}, \tag{5.44}$$

где $V_{||}$ снова даётся уравнением (5.41), и

$$Q_{k,n} = \int_0^\infty dz \psi_{\perp k}^* (z) \frac{d\psi_{\perp n}^* (z)}{dz}. \tag{5.45}$$

Начальные значения $Q_{k,n}$ берутся из таблицы I приложения [50], например, $Q_{0,1} = 0.09742 \mu m^{-1}$, $Q_{0,2} = -0.05355 \mu m^{-1}$, $Q_{0,3} = 0.03831 \mu m^{-1}$, $Q_{0,4} = -0.0304 \mu m^{-1}$.

Подставляя эти значения, мы получим для первых уровней отношение $V_{0,n}/\hat{H}_{0,n} \approx 1$ на частоте

$$\omega_{qc} \approx 10^3 \sec^{-1}. \tag{5.46}$$

Кстати, частота диабатического-адиабатического кроссовера, определяемые из условия $V_{0n} \sim \hat{H}_{0,n}$, близка к значению в Ур. (5.38).

Ниже мы рассмотрим только взаимодействие нейтронов и риплонов в диабатическом пределе, соответствующем частоте риплонов $\omega_q > \omega_{qc}$ и потенциалу взаимодействия, описываемому уравнением (5.37), потому что $\omega > \omega_{qc}$ соответствует гораздо большему объёму фазового пространства риплонов. Как будет показано ниже, основной вклад в рассеяние нейтронов риплонами действительно происходит от риплонов с энергией большей, чем $\hbar\omega_{qc}$.

Скорость рассеяния w_r нейтрона с импульсом вдоль плоскости $\boldsymbol{p}_{||}$ риплоном определяется двумя процессами: адсорбцией и эмиссией риплона с импульсом $\boldsymbol{q}$ и энергией $\hbar\omega_q$. Поскольку обычная температура ^{4}He T много больше чем начальная энергия нейтрона K_n, числа заполнения риплонных состояний с соответствующими энергиями $N_q \gtrsim 1$, или даже $N_q \gg 1$. Фазовый объём поглощённых риплонов много больше чем излучаемых, так как энергия излучаемых риплонов ограничена $K_n \ll T$. Следовательно, можно было бы ожидать, что скорость рассеяния нейтрона риплоном с начальной кинетической энергией нейтрона $K_n \ll T$ определяется скоростью поглощения w_a риплонов: $w_r \approx w_a$. Тем не менее, из-за расходимости скорости рассеяния w_r при низкой энергии (смотрите ниже), излучение низкоэнергетических риплонов с энергиями $\hbar\omega_q \ll K_n$ также может быть важно, и мы рассмотрим оба этих процесса.

5.4.4 Поглощение риплонов

Скорость процессов поглощения риплонов w_a для нейтрона с импульсом вдоль плоскости $\boldsymbol{p}_{||}$ (и дискретным вертикальным энергетическим уровнем E_n) даётся золотым правилом Ферми

$$w_a = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{N_q S d^2 \boldsymbol{p}_q}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{S d^2 \boldsymbol{p}'_{||}}{(2\pi\hbar)^2} \sum_n |T_{if}|^2 \delta (\varepsilon_i - \varepsilon_f), \tag{5.47}$$

где $\boldsymbol{p}_q \equiv \hbar\boldsymbol{q}$ это импульс риплона, $\boldsymbol{p}'_\parallel$ и n – это квантовые числа конечного состояния нейтрона при движении вдоль и перпендикулярно плоскости поверхности соответственно,

$$N_q = \left[\exp\left(\hbar\omega_q/k_BT\right) - 1\right]^{-1} \tag{5.48}$$

это функция распределения Бозе риплонов с энергией $\hbar\omega_q$ и с нулевым химическим потенциалом. Матричный элемент $|T_{if}|$ даётся уравнением (5.43), полная начальная энергия

$$\varepsilon_i = \hbar\omega_q + \boldsymbol{p}_\parallel^2/2m_\mathrm{n} + E_0. \tag{5.49}$$

Полная конечная энергия $\varepsilon_f = \boldsymbol{p}_\parallel'^2/2m_m + E_n$ после использования двумерного закона сохранения импульса, дающего δ-функцию в уравнении (5.43), записывается в виде

$$\varepsilon_f = \frac{p_\parallel^2 + p_q^2 + E_n + 2p_qp_\parallel\cos\phi}{2m_\mathrm{n}}, \tag{5.50}$$

где ϕ это угол между $\boldsymbol{p}_\parallel$ и $\boldsymbol{p}_q$. Интегрирование по компоненте конечного импульса нейтрона, параллельного поверхности $\mathbf{p}'_\parallel$, сокращает δ-функцию в уравнении (5.43), и после подстановки в уравнения (5.49) и (5.50) мы получаем:

$$\begin{aligned} w_a &= \int \frac{N_qSp_qdp_qd\phi}{2\pi\hbar^3}\sum_n \left|\psi_{\perp 0}\left(0\right)\psi^*_{\perp n}\left(0\right)V_0\xi_{0q}\right|^2 \\ &\quad\times\delta\left(\hbar\omega_q - \Delta E_n - \frac{p_q^2 + 2p_qp_\parallel\cos\phi}{2m_\mathrm{n}}\right), \end{aligned} \tag{5.51}$$

где $\Delta E_n = E_n - E_0$ - это изменение энергии нейтронов перпендикулярно плоскости поверхности после поглощения риплона. Интегрирование по ϕ сокращает δ-функцию в Ур. (5.51) и дает

$$w_\mathrm{abs} = \int_0^\infty \frac{N_qSp_qdp_q}{\pi\hbar^3}\sum_n \frac{\left|\psi_{\perp 0}\left(0\right)\psi^*_{\perp n}\left(0\right)V_0\xi_{0q}\right|^2}{\sqrt{a^2 - \left(b - \Delta E_n\right)^2}}, \tag{5.52}$$

где $a \equiv p_\parallel p_q/m$ и $b \equiv \hbar\omega_q - p_q^2/2m$ [112]. Мы оцениваем этот интеграл в приложении C. Эти вычисления дают [смотрите уравнения (D.11), (D.17) и (D.21)]

$$w_\mathrm{abs}^\mathrm{up} \approx w_>^\mathrm{up} + w_<^\mathrm{up} + w_\ll^\mathrm{up} \approx 7\times10^{-5}\times T\,[\mathrm{K}]\ \ \mathrm{s}^{-1}. \tag{5.53}$$

Это соответствует среднему времени рассеяния нейтронов из-за поглощения риплонов $\tau_r >$ 4 часов даже при $T = 1K$.

5.4.5 Испускание риплонов

Скорость испускания риплона поверхностным нейтроном с импульсом $\mathbf{p}_\parallel$ даётся Золотым Правилом Ферми, подобно уравнению (5.47):

$$w_{\rm em} = \frac{2\pi}{\hbar}\int \frac{N'_q S d^2\mathbf{p}_q}{(2\pi\hbar)^2}\int \frac{S d^2\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^2}\sum_n \left|T_{\rm if}\right|^2 \delta\left(\varepsilon-\varepsilon'\right). \tag{5.54}$$

Здесь символом $\mathbf{p}_q \equiv \hbar\mathbf{q}$ теперь обозначен импульс испускаемого риплона, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}_\parallel - \mathbf{p}_q$ это плоскостная проекция импульса нейтрона после испускания риплона,

$$N'_q = 1 + \left[\exp\left(\hbar\omega_q/k_{\rm B}T\right)-1\right]^{-1}, \tag{5.55}$$

– это число заполнения риплона, $\varepsilon \approx \mathbf{p}_\parallel^2/2m$ – это начальная полная энергия, и

$$\varepsilon' = \frac{p_\parallel^2 + p_q^2 - 2p_q p_\parallel\cos\phi}{2m} + E_n + \hbar\omega_q,$$

– это полная конечная энергия. Матричный элемент даётся уравнением (5.43). Интегрирование по $\mathbf{p}'$ в уравнении (5.54) сокращает δ-функцию в матричном элементе,

$$\begin{aligned} w_{\rm em} &= \int \frac{S N'_q p_q dp_q}{2\pi\hbar^3}\sum_n \left|\psi_\perp(0)\,\psi'^*_\perp(0)\,V_0\xi_{0q}\right|^2 \\ &\quad\times\int_0^{2\pi} d\phi\,\delta\left(\frac{p_q^2 - 2p_q p_\parallel\cos\phi}{2m} + E_n + \hbar\omega_q\right). \end{aligned} \tag{5.56}$$

Интегрирование по углу ϕ между $\mathbf{p}_\parallel$ и $\mathbf{p}_q$ в уравнении (5.56) подобно уравнению (5.51) и даёт

$$w_{\rm em} = \int_0^{p_{\rm em}^{\max}} \frac{S N_q p_q dp_q}{\pi\hbar^3}\sum_n \frac{\left|\psi_\perp(0)\,\psi'^*_\perp(0)\,V_0\xi_{0q}\right|^2}{\sqrt{a^2-\left(b_1+\Delta E_n\right)^2}}, \tag{5.57}$$

где $a \equiv p_\parallel p_q/m$ как и в предыдущем параграфе, и $b_1 = \hbar\omega_q + p_q^2/2m$. Подынтегральное выражение действительно когда $0 \le \Delta E_n \approx E_n \le a - b_1 = p_\parallel p_q/m - \hbar\omega_q - p_q^2/2m$. Это неравенство может быть выполнено только при $a - b_1 > 0$, что для $p_\parallel^2/2m = 100$ нэВ даёт $p_q < p_{\rm em}^{\max} = \hbar q_{\rm em}^{\max}$ с $q_{\rm em}^{\max} \approx 6.5\times10^4$ cm^{-1}. Тогда максимальное значение передачи "вертикальной" энергии нейтрону $a - b_1 \sim 3$ neV $\ll V_0 = 18.5$ neV. Пэтому, для испускания риплонов, $E_n \ll V_0$, и мы можем использовать уравнения (5.11), (5.12) и (D.18). Также, вместо рассмотрения трёх интервалов для параметров, как было в случае поглощения риплонов, нам нужно расссмотреть только один интервал. Подставляяя уравнения (5.33), (5.34) и оценивая сверху $\left|\psi'_\perp(0)\right|^2 \le \left|\psi_{\perp 0}(0)\right|^2$ в уравнении (5.57), мы получим верхнюю

оценку $w_{\rm em}^{\rm up}$ для скорости испускания $w_{\rm em}$ риплонов движущимся нейтроном:

$$\begin{aligned} w_{\rm em}^{\rm up} &\approx \int_0^{p_{\rm em}^{\max}} \frac{k_{\rm B}T p_q dp_q}{2\pi\hbar\alpha p_q^2} \int \frac{dn\left|\psi_{\perp 0}^2(0)\, V_0\right|^2}{\sqrt{a^2-(b_1+E_n)^2}} \\ &= \int \frac{k_{\rm B}T dp_q}{\pi^2\hbar^2\alpha p_q} \frac{\left|\psi_{\perp 0}^2(0)\, V_0\right|^2}{g\sqrt{2m}} \int_0^{a-b_1} \frac{\sqrt{E_n}dE_n}{\sqrt{a^2-(b_1+E_n)^2}}. \end{aligned} \tag{5.58}$$

Этот интеграл имеет сходство с уравнением (D.19): он отличается только знаком E_n в знаменателе и, следовательно, имеет другой верхний предел итегрирования. Мы можем дать верхнюю оценку этого интеграла с помощью замены $\sqrt{E_n}$ его максимальным значением $\sqrt{a-b_1}$ в подынтегральном выражении и заменив нижний предел интегрирования на $-b_1$ в Ур. (5.58), что даёт

$$\begin{aligned} w_{\rm em}^{\rm up} &\approx \int \frac{k_{\rm B}T dp_q}{\pi^2\hbar^2\alpha p_q} \frac{\left|\psi_{\perp 0}^2(0)\, V_0\right|^2}{g\sqrt{2m}} \int_{-b_1}^{a-b_1} \frac{\sqrt{a-b_1}dE_n}{\sqrt{a^2-(b_1+E_n)^2}} \\ &= \int_0^{p_{\rm em}^{\max}} \frac{k_{\rm B}T dp_q}{\pi\hbar^2\alpha p_q} \frac{\left|\psi_{\perp 0}^2(0)\, V_0\right|^2}{2g\sqrt{2m}} \sqrt{\frac{p_\parallel p_q}{m} - \hbar\omega_q - \frac{p_q^2}{2m}}. \end{aligned}$$

Этот интеграл сходится; пренебрегая $p_q^2/2m \ll \hbar\omega_q$ и меняя переменную интегрирования на $\sqrt{p_q}$ мы наконец получаем

$$w_{\rm em}^{\rm up} \approx \frac{k_{\rm B}T}{\pi\hbar^2\alpha} \frac{\left|\psi_{\perp 0}^2(0)\, V_0\right|^2}{g\sqrt{2m}} \frac{2}{3} \left(\frac{p_\parallel}{m}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{\rho\hbar}{\alpha}}. \tag{5.59}$$

Скорость испускания риплона зависит от начального импульса нейтрона $p_\parallel$. При $K = p_\parallel^2/2m = 100$ neV Ур. (5.59) даёт

$$w_{\rm em}^{\rm up} \approx 2\times 10^{-5}\ {\rm s}^{-1} \times T\,[{\rm K}]\,. \tag{5.60}$$

Объединяя уравнения (5.53) and (5.60) мы получаем верхнюю оценку для полной скорости рассеяния поверхностных нейтронов на нижнем энергетическом уровне E_0 риплонами:

$$w_{\rm rip}^{\rm up} = w_{\rm abs}^{\rm up} + w_{\rm em}^{\rm up} \approx 9\times 10^{-5}\ {\rm s}^{-1} \times T\,[{\rm K}]\,. \tag{5.61}$$

Эта скорость соответствует среднему времени рассеяния нейтронов из-за испускания и поглощения риплонов $\tau_{\rm rip} > 3$ часа даже при температуре $T = 1$ K.

5.5 Другие процессы рассеяния нейтрона

5.5.1 Рассеяние поверхностных нейтронов на фононах из обьёма жидкости

Рассеяние ультрахолодных нейтронов внутри сверхтекучего гелия фонононами из обьёма жидкости было изучено в работе [63]. Там было показано, что существует два основных процесса, которые приводят к рассеянию ультрахолодных нейтронов внутри жидкого гелия: (i) однофононное поглощение и (ii) однофононное поглощение, соединённое с испусканием другого фонона за счет ангармонического (кубического) члена в гамильтониане фононов. Как было показано в работе [63], второй процесс дает большую скорость рассеяния при низкой температуре, и общее время рассеяния для нейтрона, погружённого в жидкий ^{4}He при $T = 1$ K, составляет около $\tau_{\rm ph0} = 100$ s. В нашем случае нейтрона над поверхностью жидкого гелия, оба процесса рассеяния ослаблены на коэффициент

$$\int_{-\infty}^{0} \psi_{\perp}^{2}(z)\, dz = \psi_{\perp}^{2}(0)/2\kappa \approx 1.16 \times 10^{-7},$$

потому что только небольшая часть волновой функции нейтрона проникает в жидкий гелий. Следовательно, даже при $T = 1$ K, Время рассеяния нейтронов на объемных фононах в жидком гелии $\tau_{\rm ph} \approx \tau_{\rm ph0} 2\kappa/\psi_{\perp}^{2}(0) \gtrsim 10^9$ секунд чрезвычайно велико и может быть проигнорировано.

Первый процесс является однофононным поглощением, которое в приближении линейного закона дисперсии, даёт для скорости рассеяния нейтрона в жидком гелии (смотрите уравнение (5) в работе [63])

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{\rm ph1}} &= n_{\rm He} \frac{4\pi a^2 E^*}{Mc^2} \frac{\hbar k^*}{m} \exp\left(\frac{-E^*}{k_{\rm B}T}\right) \\ &= n_{\rm He} \frac{16\pi a^2 mc}{M} \exp\left(\frac{-E^*}{k_{\rm B}T}\right), \end{aligned} \tag{5.62}$$

где $k^* = 2mc/\hbar$ является точкой пересечения кривых дисперсии нейтрона и фонона, $c = 2.38 \times 10^4$ cm/s скорость звука в ^{4}He, и $E^* = \hbar c k^* = 2mc^2 = 1.9 \times 10^{-15}$ erg ≈ 13.75 K. Eq. (5.62) даёт при $T = 1$ K

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{\rm ph1}} &\approx 4\pi a^2 c\, n_{\rm He} \exp\left(\frac{-E^*}{k_{\rm B}T}\right) \\ &= 693 \exp\left(\frac{-13.75}{T\ [\rm K]}\right). \end{aligned}$$

Это даёт $\tau_{\rm ph1} = 1350$ s вместо 360 s представленных в работе [63], поскольку значение $E^*/Mc^2 \approx 0.4$ вместо 0.5 полученых из $E^* = 2mc^2$ что было использовано в работе [63], вероятно, принимая во внимание тонкую кривизну дисперсионного соотношения фононов. В любом случае, конечная общая скорость рассеяния поверхностного нейтрона на объемных фононах равна $\lesssim 10^{-9}$ сек$^{-1}$ и пренебрежимо мала из-за малого перекрытия поверхностного нейтрона с жидким гелием.

5.5.2 Рассеяние на сюрфонах

В работе [15] новый тип поверхностных возбуждений (сюрфоны) был предложен в дополнение к риплонам, для того чтобы объяснить температурную зависимость коэффициента поверхностного натяжения жидкого гелия. Эти возбуждения подробно исследовались в первых главах диссертации. Хотя этот тип поверхностных возбуждений имеет только косвенные экспериментальные проявления, мы также кратко рассмотрим скорость рассеяния нейтронов сюрфонами. Потенциал взаимодействия такой же, как для взаимодействия нейтронов с атомами пара гелия, но сюрфоны распространяются только по поверхности гелия. Следовательно, сюрфон-нейтронное взаимодействие содержит дополнительный малый множитель $\sim z_0\psi_\perp^2\left(0\right) \sim 3\cdot 10^{-5}$ из-за малого перекрытия нейтронной и сюрфонной волновых функций. Энергия активации сюрфонов $\Delta_{\rm s0} \approx k_B{\cdot}2.67$ K$= 3.7{\cdot}10^{-16} erg$ получена в [64] и в главе 3 подгонкой экспериментальных данных по температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения жидкого ^{4}He. Эта энергия активации сюрфонов намного меньше энергии испарения $-\mu = k_B \cdot 7.17K$ of ^{4} атома гелия. Таким образом, при достаточно низкой температуре рассеяние нейтронов на сюрфонах превышает скорость рассеяния на паре гелия и должно рассматриваться для полноты картины.

В этом вычислении мы можем принебречь начальным импульсом ультрахолодных нейтронов p в сравнении с большим начальным импульсом сюрфона $P_\parallel \sim \sqrt{2k_{\rm B}T\,M}$, аналогично рассеянию на паре гелия в разделе III. Мы также предполагаем, что кинетическая энергия сюрфона в направлении плоскости не достаточна, чтобы испарить атом гелия из состояния сюрфона после рассеяния. Однако, энергетический уровень нейтрона E_n может меняться, и импульс нейтрона в вертикальном направлении может не сохраняться, поскольку поверхность гелия нарушает однородность вдоль оси z. Энергия сюрфона состоит из энергии возбуждения $\Delta_{\rm s0}$ и кинетической энергии $K_{\rm sur} = \mathbf{P}_\parallel^2/2M$ его движения в горизонтальном направлении. Числа заполнения состояний сюрфона приблизительно даются распределением Больцмана, $N_{\rm sur}\left(P_\parallel\right) \approx \exp\left[-\left(\Delta_{\rm s0} + P_\parallel^2/2M\right)/k_{\rm B}T\right]$. Расчет описан

в приложении D и дает очень маленькую верхную оценку скорости рассеяния нейтронов на сюрфонах:

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{sur}}^{\mathrm{up}} &= \frac{\left(Mk_{\mathrm{B}}T\right)^{3/2} a_{\mathrm{He}}^{2}}{\hbar^{2}m} \left|\psi_{\perp 0}^{2}\left(0\right)\right| \frac{\sqrt{1.6\,\pi}}{5} \exp\left(\frac{-\Delta_{\mathrm{s0}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \\ &\approx 4\times 10^{-8} \exp\left(\frac{-\Delta_{\mathrm{s0}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \times T^{3/2}\,[\mathrm{K}]\ \mathrm{s}^{-1}. \end{aligned} \tag{5.63}$$

Эта скорость рассеяния нейтронов $w_{\mathrm{sur}}^{\mathrm{up}}$ на сюрфонах гораздо меньше, чем скорость рассеяния w_{vap} на паре гелия в уравнении (5.32) при температуре $T > 0.25K$. При этой и при более низкой температуре $w_{\mathrm{sur}}^{\mathrm{up}} \ll w_{\mathrm{rip}}^{\mathrm{up}}$, и рассеяние на риплонах является доминирующим. Следовательно, при любой температура можно пренебречь рассеянием ультрахолодных нейтронов на сюрфонах.

Таким образом, общий коэффициент рассеяния w_{tot} ультрахолодных нейтронов на поверхности жидкого гелия 4 определяется рассеянием на паре гелия при высокой температуре $T \gtrsim 0.6$ K, и на риплонах при низкой температуре $T \lesssim 0.6$ K. Эта скорость рассеяния как функция температуры показана на графике на рисунках 5.2 и 5.3.

5.6 Обсуждение и эскизы экспериментальных реализаций

Расчеты, представленные в этой статье, показывают, что при температурах ниже 0.7 K, среднее время рассеяния нейтрона, находящегося в гравитационно-связанном квантовом состоянии над горизонтальной плоской поверхностью жидкого гелия, больше времени бета-распада нейтрона. Эта поверхность может действительно представлять почти идеальное зеркало, что призывает к ее экспериментальной демонстрации и применению для ловушек УХН. Такая система может предложить отличные возможности не только для изучения квантовых состояний представленных на рисунке 5.1 , но также служить в качестве чувствительных проб для обнаружения крошечных переносов энергии в связи с внутренним или внешним возмущением гелия. Возможное применение этой системы, явившееся основной мотивацией для этой теоретической работы, – это высокоточные исследования схемы уровней нейтрона в гравитационном потенциале над жидким зеркалом, дающие доступ к наблюдению гравитационного потенциала на малых масштабах длины между. Мотивацией с экспериментальной точки зрения является нынешнее развитие новых источников ультрахолодных нейтронов в институте Лауэ-Ланжевена (Гренобль, Франция),

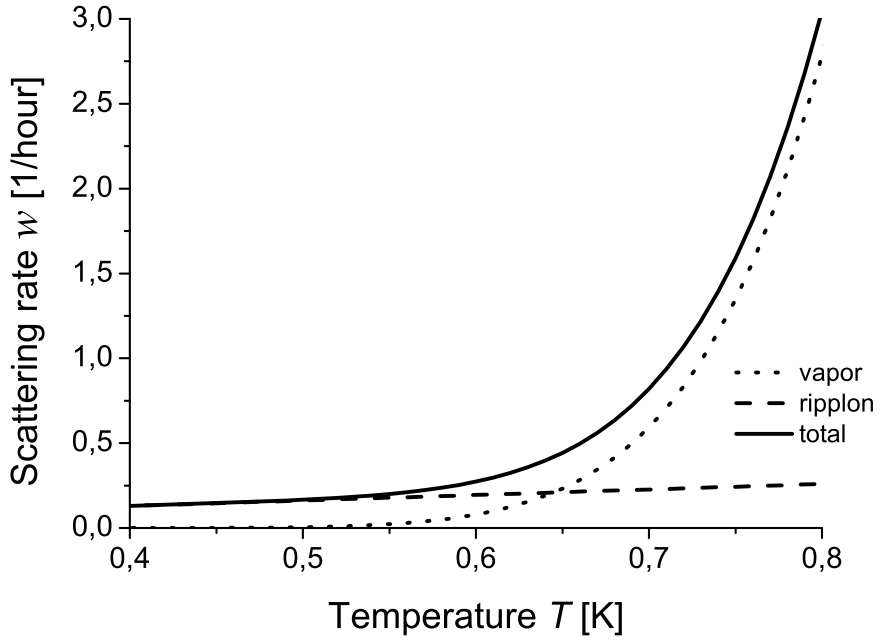


Рис. 5.2: Вычисленная полная скорость рассеяния (сплошная линия) ультрахолодных нейтронов на поверхности жидкого гелия в обратных часах. Точечная и пунктирная линии показывают вклады в рассеяние ультрахолодных нейтронов пара гелия и риплонов соответственно.

которые включают охлаждение множества литров сверхчистого, сверхтекучего гелия ниже 0.7 K [93, 94] и опираются на теоретические работы Голуба и Пендлбери (Golub and Pendlebury) по использованию генерации надтепловых ультраходных нейтронов с помощью замедляющего рассеяния холодных нейтронов в сверхтекучем гелии [91, 92].

Скорость рассеяния нейтронов на паре гелия уменьшается быстрее чем экспоненциально при снижении температуры [$\propto T^2 \exp(-\text{const}/T)$, см. Ур. (5.32)], и уже при $T = 0.8$ K становится меньше скорости распада нейтронов. Верхняя оценка скорости рассеяния поверхностных нейтронов из-за риплонов при $T = 0.8$ K оказывается на порядок меньше скорости рассеяния на паре гелия. Благодаря своей линейной температурной зависимости рассеяние на риплонах станет основным вкладом при температурах ниже 0.6 K [смотрите уравнение (5.61)], однако на этом уровне оно уже в 50 раз ниже скорости бета-распада нейтронов. В то время как все процессы, рассчитанные здесь, должны быть незначительными для точности исследования схемы уровней нейтронов в гравитационном потенциале, эксперименты, включающие сохранение нейтронов с энергиями вплоть до нейтронного оп-

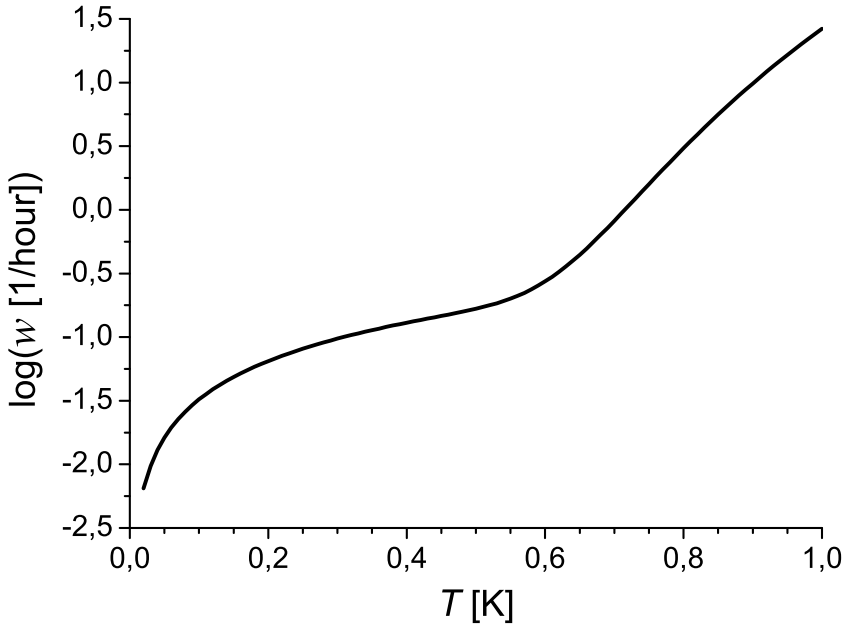


Рис. 5.3: Десятичный логарифм вычисленной общей скорости рассеяния ультрахолодных нейтронов над поверхностью жидкого гелия.

тического барьера V_0 в свехтекучем гелии [смотрите уравнение (5.2)], могут иметь иные требования. В этом отношении кажется полезным, что основной вклад в скорость рассеяния нейтронов при таких низких температурах связан с низкоэнергетической частью риплонного спектра и таким образом преимущественно приводит лишь к переходам между соседними квантовыми состояниями нейтронов. Перенос энергии в пределах нескольких peV обычно является недостаточным, чтобы заставить нейтрон проникнуть через жидкость и покинуть систему. Таким образом, при 0.6 K среднее время ухода ультрахолодных нейтронов с кинетической энергией $K < V_0$ может быть на несколько порядков больше времени распада нейтрона. Это делает экспериментальные устройства на жидком гелии хорошим кандидатом для использования в качестве контейнера для нейтронов, и действительно подобная система была предложена для применения в эксперименте для измерения времени жизни нейтрона [95].

Для большей надёжности, измерение должно быть выполнено при различных температурах и контейнер должен быть заполнен нейтронами с энергией меньше V_0. Следует также отметить, что значение $V_0 = 18.5$ neV для сверхтекучего гелия невелико в сравнении с 100 neV и более для обычных материалов, используемых для нейтронных бутылок.

Малое количество нейтронов создаёт ограничения для возможных экспериментов. Тем не менее, измерение времени жизни нейтрона с использованием ловушки с участием горизонтальной поверхности сверхтекучего гелия может оказаться интересным дополнением к проектам с использованием магнитной ловушки для нейтронов. Хотя системы с магнитными ловушками нейтронов полностью исключают рассеяние на стенках, но зато они имеют множество других трудноучитываемых факторов рассеяния нейтронов, рассматриваемых в работах [97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104] (смотрите также работы [105, 106] для ознакомления с последними дискуссиями о проблеме измерения времени жизни нейтрона).

Переходя к вопросу, как заполнить и обнаружить нейтронные квантовые состояния над зеркалом из сверхтекучего гелия (в дальнейшем называемое "жидким зеркалом"), в отличие от твердого зеркала, использовавшегося в более ранних экспериментах, надо как-то ограничить жидкость, и приходится иметь дело с наличием мениска на границе контейнера гелия (границей зеркала). В традиционной "проточной" схеме текущих экспериментов нейтроны вводятся на зеркало с одной стороны и детектируются на другой стороне. Эта схема также может быть технически возможна для жидкого зеркала, где нейтроны входят на зеркало и выходят с него через тонкий слой слабо поглощающей фольги с низким (или отрицательным) нейтронным оптическим потенциалом. Применение магнитых полей может добавить новые интересные возможности для экспериментов, которые мы попытаемся описать ниже.

При заполнении нейтронами поверхности можно использовать градиент магнитного поля для замедления нейтронов, движущихся над горизонтальным зеркалом и локализованных при $z = 0$. Величина магнитного поля $B(z) = Cz$, например, с постоянным (положительным) градиентом $C > mg/|\mu_{\mathrm{n}}| \approx 1.66$ T/m (μ_{n} это магнитный момент нейтрона) перекомпенсирует гравитацию для нейтронов с направлением магнитного момента вдоль магнитного поля (спин против поля), для которого энергия нейтрона падает в с ростом поля. Эти нейтроны с вертикальной кинетической энергией $E_{\perp} = (|\mu_{\mathrm{n}}| C - mg) h$ на высоте h теряют эту энергию при достижении поверхности зеркала. Если, в качестве альтернативы, мы хотим замедлить нейтроны энергия которых растёт в магнитном поле, градиент должен быть инвертирован и, следовательно, более сильное поле должно быть расположено около поверхности. В то время как нейтрон достигнет нижней точки его траектории, градиент магнитного поля около зеркала должен быть выключен. Для ограничения области пространства, где должно быть магнитное поле, мы можем использовать поток нейтронов, скорость которых вертикальна и строго ориентированна. Такие нейтроны заканчивают движение строго над зеркалом. Круговой абсорбер с центральным

отверстием для трубы для подачи нейтронов и установленым на изменяемом расстоянием в несколько десятков μm над зеркалом может служить для получения нейтронов на низких квантовых уронях, таких как нейтроны используемые в первых экспериментах со связанным состоянием нейтронов в гравитационном поле [46]. Преимуществом метода заполнения нейтронами с помощью магнитного поля является возможность детектировать нейтроны, разлетающиеся в любых горизонтальных направлениях. Использование жидкого зеркала из гелия предлагает дополнительное преимущество, в том что почти идеальное зеркало может быть значительно больше, чем кварцеве зеркала, использовавшиеся в прошлых экспериментах.

Имеется два типа экспериментов с поверхностными нейтронами: когда нейтроны впрыскиваются с одной стороны поверхности и улавливаются с другой, и когда нейтроны локализованы на участке зеркала нейтронной ловушкой, например, с помощью магнитного поля. Эксперимент второго типа может быть реализован с помощью магнитной ограды, состоящей из большого числа ориентированных магнитов, аналогично системе, описанной в работе [107]. Для нашей цели эти магниты должны быть ориентированы таким образом, чтобы обеспечивать только поле, ориентированное перпендикулярно поверхности гелия. Это направление поля не даст нейтронам с ориентацией спина такой, что энергия этих нейтронов растёт с ростом поля, достигнуть мениска жидкости около стенок сосуда, но сохранит вертикальные квантовые состояния нейтронов.

Далее, мы обсудим возможности дальнейшего улучшения техники заселения зеркал. Прежде всего отметим что вертикальная, прямая, упругоотражающая трубка с постоянным сечением по которой текут нейтроны не смешивает вертикальную и горизонтальную компоненты скорости нейтрона. В результате, чем ближе типичные нейтроны приближаются к зеркалу, тем больше будет количество отражений на единицу длины направляющей. Даже небольшое неупругое отражение может стать проблемой. К тому же, типичный нейтрон из типичного источника ультрахолодных нейтронов, после компенсации его кинетической энергии в вертикальном направлении, всё равно имеет конечную кинетическую энергию в горизонтальном направлении порядка нескольких метров в секунду. Низкая скорость нейтрона может быть полезна для увеличения времени которое требуется нейтрону для преодоления зеркала в проточном режиме, а значит и для уменьшения силы магнитного поля, требующегося для того чтобы поймать нейтрон в магнитную ловушку на зеркале.

В физике нейтронов активно применяется так называемая оптика, не работающая с изображениями (non-imaging optics). Ее цель – это создание не четкого изображения ис-

точника, а максимального потока частиц на детекторе (или в произвольной области пространства). Устройство из этого разряда, предложенное Хикерсоном и Филиппоне предлагает интересное средство для лечения вышеупомянутых недостатков прямой трубки по которой текут нейтроны [108]. Они описывают соединение параболического концентратора для нейтронов, выходящих из источника в направлении противоположном гравитационному полю. Эти нейтроно-оптическе свойства основаны на свойствах нейтронного фонтана [109], работающего при наличии постоянной силы производимой полем и направленной вдоль оси симметрии параболической отражающей поверхности. Использование постоянного магнитного градиента поля с избытком компенсирует действие гравитации, и нейтроны, приближающиеся к зеркалу сверху, будут испытывать постоянное замедление $a = C/m - g$. Можно использовать параболический концентратор, перевёрнутый над источником нейтронов (отверстием с радиусом R), расположенным на высоте h над зеркалом. В соответствии с формулами, приведенными в работе [108], нейтроны, начинающие движение во время $t = 0$ со скоростью v_0, по истечении времени $T = v_R/a$ (где $v_R = \sqrt{v_0^2 + 2aR}$) и, обычно, с менее чем двумя отражениями, прибывают в узком диапазоне высоты $0 \leq z < R$ над горизонтальным зеркалом. Разброс полной кинетической энергии в ансамбле ультрахолодных нейтронов равно $\Delta E \approx maR/3$ и не зависит от v_0. После выключения градиента поля, нейтроны близкие к зеркалу, будут двигаться с гораздо более низкими горизонтальными скоростями по сравнению с традиционным методом инжекции нейтронов. Таким образом, даже без бокового захвата, состояние заселения с помощью параболического концентратора приводит к сильному увеличению времени взаимодействия с зеркалом и соответствующему приросту в точности измерений. Параболический концентратор будет наиболее выгодным при импульсном источнике ультрахолодных нейтронов и, следовательно, лучше всего работает в экспериментах с захватом ультрахолодных нейтронов. Отметим, что очень низкие горизонтальные скорости нейтронов позволяют использовать довольно скромное магнитноой поле захвата, что позволяет легко обеспечить большие отверстия для обнаружения нейтронов в ловушке, образованной упорядоченными магнитами. Очевидно, что параболический концентратор с магнитной системой торможения также может быть использован для достаточно больших обычных (не жидких) зеркал.

В целом, эта глава дала положительные ответы, касающиеся необходимых предпосылок для применения зеркала из сверхтекучего гелия для изучения и применения квантовых связанных состояний нейтрона в гравитационном поле Земли. Дальнейшие исследования необходимы для решения вопросов о различном воздействии на нейтроны в связан-

ном квантовом состоянии, например, о возможности того чтобы переходы между уровнями могли быть вызваны индуцированными колебаниями поверхности гелия. Интересно также рассмотреть дальнейшие перспективы создания плоских зеркал с большой поверхностью, таких как масла фомблин (уже опробованых в оптической системе для измерения заряда и дипольного момента нейтронов [110]), или жидкий или твердый неон.

Подводя итог этой главы, мы предложили и подробно исследовали новую систему – ультрахолодные нейтроны над поверхностью жидкого гелия в прижимающем потенциале силы тяжести. Мы вычислили зависящие от температуры скорости рассеяния ультрахолодных нейтронов, находящихся на нижних квантовых уровнях, образованных гравитационным потенциалом и нейтронно-оптическим барьером зеркала из сверхтекучего гелия (см. Рис. 5.1). Ниже температуры $T = 0.8$ K скорость рассеяния поверхностных нейтронов становится меньше скорости бета-распада нейтрона. Этот вывод является обнадеживающим для использования такой системы при изучении квантовых состояний на рис. 5.1. При $T > 0.6$ K доминирует рассеяние на атомах пара, а при более низких температурах определяющим является взаимодействие с риплонами, как это показано на рис. 5.2 и 5.3. Другие процессы, такие как взаимодействия нейтронов с объемными фононами или с сюрфонами дают пренебрежимо малый вклад в рассеяние поверхностных нейтронов.

Заключение

В разделе II в работе предложена простая теоретическая модель нового типа возбуждений на повехности жидкости (названных сюрфонами). На основе этой модели выполнено квантово-механическое вычисление энергии сюрфонов E_s и их эффективной массы M^*. Это вычисление подтверждает существование сюрфонов на поверхности жидкого гелия, поскольку оно показывает, что атомы гелия имеют по крайней мере один дискретный квантовый уровень над поверхностью. Атомы гелия притягиваются к поверхности жидкого гелия силами Ван-дер-Ваальса и локализуются над поверхностью в направлении, перпендикулярном поверхности. Имея возможность двигаться только в направлении вдоль поверхности, эти атомы образуют двумернй газ над поверхностью. Зависящая от температуры концентрация сюрфонов определяется их энергией активации $\Delta = E_s - \mu$ [смотрите уравнение (1.10)]. Если $E_s < \mu$, жидкость не стабильна к переходу атомов из объема жидкости на поверхностные уровни. Если $E_s > 0$, концентрация сюрфонов пренебрежимо мала по сравнению с концентрацией пара при всех температурах. Для обоих изотопов гелия вычисленные значения E_s лежат в интервале $\mu < E_s < 0$, что и подтверждает существование сюрфонов.

Образование лунки под сюрфонами уменьшает их энергию активации на величину $\Delta E_s \sim 1K$ [см. Рис. (2.6),(2.7)]. Эта лунка также увеличивает в несколько раз эффективную массу сюрфонов в их движении вдоль плоскости [см. уравнения (2.8),(2.9)]. Это увеличение физически понятно, поскольку при движении вдоль поверхности сюрфоны также "тащат" за собой лунку, что включает движение нескольких атомов в жидкости.

Экспериментальное наблюдение и исследование сюрфонов возможно благодаря тому, что сюрфоны вносят главный вклад в температурную зависимость коэффициента поверхностного натяжения. В разделе III работы этот вклад вычисляется с высокой точностью, учитывая экспериментальную зависимость термодинамических величин (химического потенциала и плотности) жидкого гелия. При очень низкой температуре этот вклад экспоненциально мал из-за конечной энергии активации сюрфонов. При высокой температуре этот вклад $\propto T^2$ для обоих изотопов гелия.

Учет экспериментальной температурной зависимости химического потенциала и плотности гелия значительно улучшает согласии теории с экспериментальными данными по коэффициенту поверхностного натяжения по сравнению с работой [15], где впервые была изложена идея о существовании сюрфонов как нового типа поверхностных возбуждений.

Различие между предсказаниями изложенной теории и экспериментальной температурной зависимостью коэффициента поверхностного натяжения жидкого гелия $\lesssim 1\%$ во всем интервале температуры [для ^{4}He такое высокое согласие достигается после учета вклада риплонов, пределяемого уравнением (1.6) при низкой температуре $T < T_\lambda$]. Из сравнения с экспериментом извлекаются два подгоночных параметра – энергия активации сюрфонов Δ при $T = 0$ и их эффективная масса M^*. Эти экспериментально определенные микроскопические параметры сюрфонов, значения которых для обоих изотопов гелия даны в уравнениях (1.11)-(1.13), находятся в разумном согласии с вычислениями из раздела II на основе предложенной теоретической модели сюрфонов и с численными расчетами поверхностных возбуждений на границе жидкий гелий - пар [24].

В разделе IV исследовано сюрфон-риплонное взаимодействие в адиабатическом пределе, когда сюрфон успевает подстроиться под искривление поверхности жидкости. Этот предел соответствует экспериментальной ситуации, поскольку квантовая частота осцилляций сюрфона на нижнем уровне вдоль оси z существенно превышает частоту риплонов. Получено явное выражение для оператора сюрфон-риплонного взаимодействия, входящего в гамильтониан как возмущение. Вычислены недиагональные матричные элементы этого оператора, вызывающие испарение сюрфонов, то есть переходы атомов гелия с поверхностного уровня в непрерывный спектр, соответствующий пару гелия. Вычислена скорость испарения сюрфонов как функция температуры и энергии движения сюрфона вдоль плоскости. Показано (см. рис. 4.5), что быстрее всего испаряются сюрфоны с большой кинетической энергией движения вдоль поверхности ("горячие сюрфоны"). При этом основной вклад в скорость испарения вносят риплоны с импульсом, противонаправленным импульсу сюрфона, так что почти вся кинетическая энергия сюрфона и риплона уходит на активацию сюрфона перпендикулярно поверхности, то есть уходу сюрфона с поверхности в пар. При повышении температуры время жизни сюрфонов сокращается (см. рис. 4.6), что соответствует физической интуиции.

В пятой главе изучена новая система – ультрахолодные нейтроны над поверхностью жидкого гелия в прижимающем потенциале силы тяжести. Мы вычислили зависящие от температуры скорости рассеяния ультрахолодных нейтронов, находящихся на нижних квантовых уровнях, образованных гравитационным потенциалом и нейтронно-оптическим барьером зеркала из сверхтекучего гелия (см. Рис. 5.1).

Полученные значения скорости рассеяния нейтрона на поверхности жидкого гелия [смотрите уравнения (5.32) и (5.61)] показывают что при достаточно низких температурах, менее 0.7K, среднее время рассеяния такого нейтрона больше собственного времени жизни

нейтрона. Это дает прекрасную возможность находить и изучать нейтроны на поверхности жидкого гелия и, в частности, изучать квантование уровней энергии нейтронов в гравитационном потенциале. Скорость рассеяния нейтронов на паре гелия экспоненциально убывает с понижением температуры, и становится незначительной при T<0.6K. Основной вклад в скорость рассеяния нейтронов при T<0.7K происходит от низкоэнергетических риплонов, с энергия порядка разделения уровней энергии $\Delta E \sim E_0$ между квантовыми состояниями в вертикальном потенциале над поверхностью, как показано на рисунке 5.1. Это рассеяние приводит к смешиванию между различными по вертикали уровнями энергии нейтронов E_n в гравитационном потенциале. Энергия таких риплонов, однако, недостаточна чтобы заставить нейтрон пройти сквозь обьём жидкого гелия и покинуть систему. Таким образом, среднее время ухода ультра-холодных нейтронов с начальной кинетической энергией $K < V_0$, где V_0 является потенциальным барьером нейтрона внутри жидкого гелия определяемым формулой (5.2), может быть еще больше. Это делает экспериментальную установку с поверхностью жидкого гелия в качестве зеркала хорошим кандидатом для ловушки (контейнера) нейтронов, который может позволить ещё более точное измерение собственного времени жизни нейтрона.

Результаты работы имеют важное значение для понимания физических явлений на поверхности жидкости при низкой температуре. Эти результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения микроскопической структуры поверхности жидкости. Полученные результаты также могут быть использованы для исследования электронных явлений и квантовых состояний нейтронов на поверхности жидкого гелия. В частности, полученные в работе значения энергии активации и эффективной массы сюрфона позволяют вычислить концентрацию сюрфонов при любой температуре. Явное выражение для потенциала и матричных элементов сюрфон-риплонного взаимодействия позволяют вычислить подвижность и время жизни (испарения) сюрфонов с поверхности гелия.

Выводы

В диссертации получены следующие результаты:

- Теоретическое обосновано существование нового типа возбуждений (сюрфонов) на поверхности жидкости при низких температурах.
- Построена микроскопическая модель связанного состояния атома (сюрфона) над поверхностью жидкости.
- Проведён расчёт энергии активации и оценка эффективной массы сюрфона, в приближении одиночных сюрфонов.
- Объяснена аномальная температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения обоих изотопов жидкого гелия, в рамках сюрфонной теории.
- Учтено сюрфон-риплонного взаимодействие. Оценено время жизни сюрфона по основным каналам рассеяния.
- Оценено взаимодействие сюрфонов между собой, в рамках приближения парного взаимодействия.
- Теоретически обосновано существование новой системы – связанного состояния ультрахолодных нейтронов в гравитационном поле на поверхности жидкого гелия 4. Построена микроскопическая модель такого состояния.
- Получена оценка времени жизни связанного состояния ультрахолодных нейтронов в гравитационном поле над поверхностью жидкого гелия 4 по всем каналам рассеяния. Проведено сравнение результата с временем β-распада нейтрона и обсуждение перспектив создания ловушек ультрахолодных нейтронов на поверхности жидкого гелия 4.

Приложение А

Неидеальный газ сюрфонов

Поправка к свободной энергии дается формулой:

$$F = F_{id} - T \ln \left(\frac{1}{V^N} \int ... \int \left(e^{-\frac{U}{T}} \right) dV_1 ... dV_2 + 1 \right) \tag{A.1}$$

Здесь U – потенциальная энергия взаимодействия всех частиц со всеми.
В случае парных взаимодействий выражение под ln в (A.1) разлагается в ряд по числу взаимодействующих пар (в приближении, что в любой момент времени частица взаимодействует не более чем с одной другой частицей):

$$I = \sum_{n=0}^{N/2} S_n, \quad S_n = A_n^N (B/N)^n, B = \int (e^{-\frac{U_1}{T}} - 1) dV_1 \tag{A.2}$$

Здесь

$$A_n^N = \frac{N!}{(N-2n)!n!2^n}$$

есть число способов выбрать n пар из N частиц, $U_1(r)$ есть потенциал взаимодействия двух частиц.

Обычно делается приближение $N!/(N-2n)! \approx N^{2n}$ Тогда при $N \to \infty$ $I = e^{N^2 B/V}$, и из ур. (A.1) получаем

$$F = F_{id} + N^2 T B(T)/V. \tag{A.3}$$

Эта формула из учебников соответствует первому члену разложения по степеням B/V , которое в нашем случае не мало.

Ряд в формуле (A.2) может быть вычислен точно. Результат выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию:

$$I = (-4B/V)^{N/2} U[-N/2, 1/2, -V/(2B)], \quad F = F_{id} - TLn(I). \tag{A.4}$$

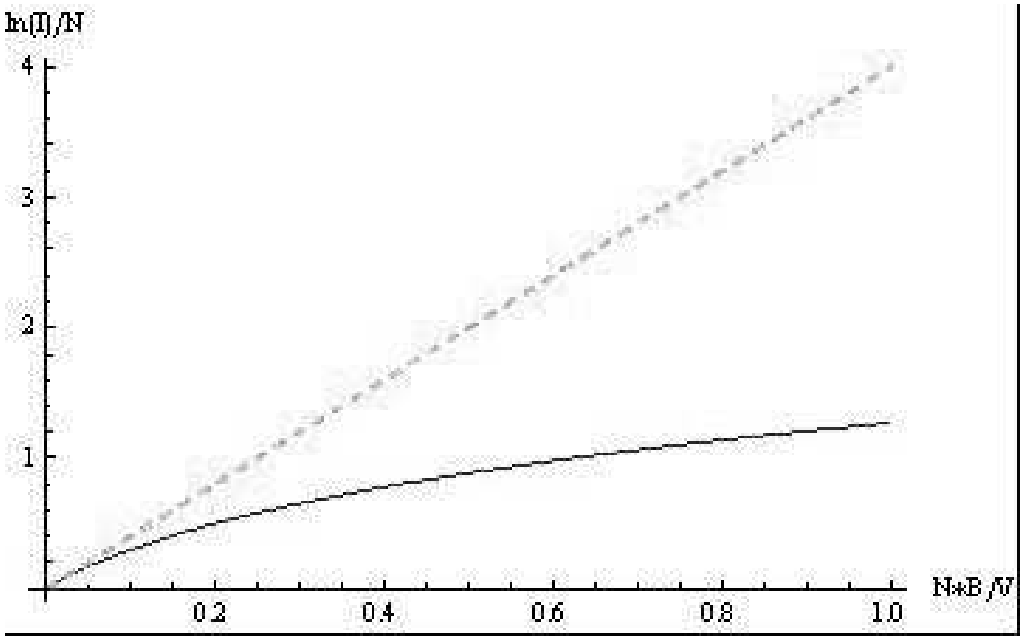


Рис. А.1: Свободная энергия в линейном и парном приближениях. Пунктирная линия относится к линейному приближению (А.3), прямая линия к формуле (А.4).

Сравнение полученной формулы (А.4) и линейного приближения в ур. (А.3) приведено на Рис. А.1. Существует проблема связаная с тем, что точная теория жидкостей до сих пор не построена, поэтому приходится выбирать лучшее из приближений. В нашей задаче мы выбрали приближение парного взаимодействия, верное при концентрациях сюрфонов далёких от насыщения.

Приступим к оценке вклада парного взаимодействия между сюрфонами в термодинамический потенциал поверхности. Прямое взаимодействие выражается через потенциал Леннарда-Джонса

$$U(r) = 4\epsilon_0 \left(\left(\frac{\sigma_0}{r} \right)^{12} - (\frac{\sigma_0}{r})^6 \right), \tag{А.5}$$

где $\epsilon_0 = 10.22K$ $\sigma_0 = 2.56\mathring{A}$. Поправка к свободной энергии от взаимодействия сюрфонов

$$F_{int} = -\frac{n(T)}{N} * T * k * \ln \left(\frac{-4B(T)}{N/n(T)} * H_N(i\sqrt{\frac{N/n(T)}{4B(T)}}) \right) \tag{А.6}$$

Вычисленная поправка к свободной энергии хорошо согласуется с экспериментом для He4 при температуре ниже 2.5 K, при эффективной массе равной обычной! Это может означать, что поверхность жидкого гелия не успевает подстроиться под движущийся сюрфон. При этом поправка связанная с существованием связанного состояния (на 0.029K)

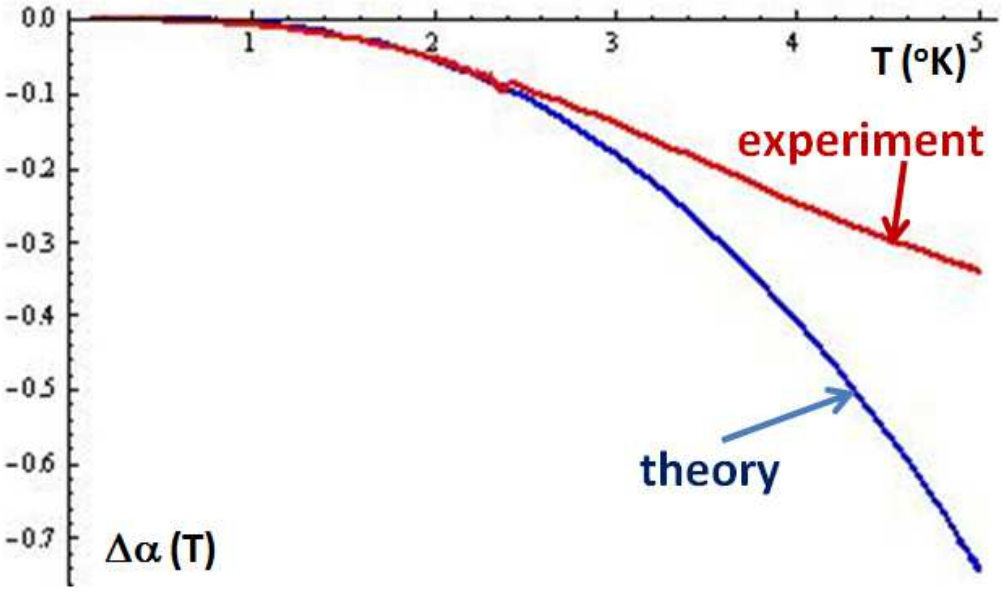


Рис. А.2: Коэффициет поверхностного натяжения He4. По абсциссе температура T в кельвинах, по ординате отклонение коэффициента поверхностного натяжения жидкого гелия от его значения при нулевой температуре в динах на сантиметр. Красной линией (справа) показаны экспериентальные данные, а синей линией (слева) – полученная в работе теоретическая зависимость. Как и ожидалось, данные полученные с помощью модели парного взаимодействия верны только вдали от температуры насыщения двумерного сюрфонного газа.

сюрфонной пары оказывается малой. Полученная с учетом взаимодействия между сюрфонами температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения жидкого гелия приведена на Рис. А.2.

Однако, данный результат требует дальнейшего теоретического изучения. Тройное взаимодействие, вклад которого увеличивается с ростом плотности и температуры, обычно уменьшает вклад парного взаимодействия. Кроме этого, приведенное вычисление вклада взаимодействия между сюрфонами в термодинамический потенциал поверхности не учитавает квантование относительного движения двух сюрфонов. Таким образом, вычисленный вклад взаимодействия между сюрфонами в свободную энергию, выраженный формулой (А.2), не содержит поправки от квантовой кинетической энергии относительного движения двух сюрфонов, который должен дополнительно уменьшить величину поправки от взаимодействия сюрфонов. Однако приведенные оценки показывают, что взаимодействие между сюрфонами может внести существенный вклад в температурную зависимость термодинамического потенциала поверхности и коэффициента поверхностного натяжения, и

должно учитываться для количественного сравнения с экспериментом. Диссертантом планируется дальнейшее изучение эффектов взаимодействия между сюрфонами в квантовом приближении.

Приложение B

Вывод нейтрон-риплонного взаимодействия в адиабатическом приближении

Уравнение Шредингера для нейтрона

$$\hat{H}\psi\left(\mathbf{r},t\right)=i\hbar\partial\psi\left(\mathbf{r},t\right)/\partial t, \tag{B.1}$$

где гамильтониан

$$\hat{H}=\hat{K}+\hat{V}=-\frac{\hbar^2\hat{\Delta}}{2m}+mgz+V_0\Theta\left[-z+\xi(\mathbf{r}_\parallel,t)\right] \tag{B.2}$$

содержит кинетическую энергию нейтрона $\hat{K}=-\hbar^2\hat{\Delta}/2m$ и потенциальную энергию нейтрона $\hat{V}=mgz+V_0\Theta\left[-z+\xi(\mathbf{r}_\parallel,t)\right]$. Последняя содержит потенциал гравитационного поля Земли и потенциальную стенку из-за наличия жидкого гелия, как показано на рисунке 5.1. Отличие от уравнения (5.4) в том, что жидкий гелий имеет теперь имеет зависящие от времени и положения в пространстве периодические границы $\xi(\mathbf{r}_\parallel,t)$ заданные ур. (4.5). Разница между уравнением (B.2) и уравнением (4) из работы [50] в том, что поверхность имеет теперь периодическую пространственную зависимость.

Адиабатическое подстраивание волновой функции нейтрона под новую форму поверхности означает, что волновая функция нейтрона, в первом приближении, сдвигается в направлении оси z на расстояние $\xi(\mathbf{r}_\parallel,t)$: $\psi\left(\mathbf{r},t\right)\rightarrow\tilde{\psi}\left(\mathbf{r}+\xi(\mathbf{r}_\parallel,t)\hat{\boldsymbol{z}},t\right)$, где $\hat{\boldsymbol{z}}$ это единичный вектор в направлении оси z. Этот сдвиг может быть описан с помощью оператора трансляции (сдвига вдоль оси z)

$$\hat{T}_z\left(\xi\right)=\exp\left[\xi(\mathbf{r}_\parallel,t)\partial/\partial z\right]=\exp\left[i\xi(\mathbf{r}_\parallel,t)p_z/\hbar\right].$$

Его действие на волновую функцию

$$\hat{T}_z(\xi)\,\psi_\perp(z) = \psi_\perp(z+\xi)\,.$$

Мы также определим новую волновую функцию

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}+\xi\hat{\boldsymbol{z}},t) = \psi(\mathbf{r},t) = \hat{T}_z(\xi)\,\tilde{\psi}(\mathbf{r},t)\,,$$

которая после подстановки в уравнение (B.1) даёт новое уравнение Шредингера для $\tilde{\psi}(\mathbf{r},t)$:

$$\hat{H}\hat{T}_z(\xi)\,\tilde{\psi}(\mathbf{r},t) = i\hbar\partial\left(\hat{T}_z(\xi)\,\tilde{\psi}(\mathbf{r},t)\right)/\partial t. \tag{B.3}$$

Действие оператора сдвига на потенциальную энергию $V(\mathbf{r})$ даётся уравнением

$$V(\mathbf{r})\,\hat{T}_z(\xi) = \hat{T}_z(\xi)\,V\left(\mathbf{r}-\xi(\mathbf{r}_\parallel,t)\hat{\boldsymbol{z}}\right), \tag{B.4}$$

в то время как для коммутатора с оператором кинетической энергии $\hat{K} = -\hbar^2\hat{\Delta}/2m$ мы имеем

$$\begin{aligned}\hat{K}\hat{T}_z(\xi) - \hat{T}_z(\xi)\,\hat{K} &= -\frac{\hbar^2}{m}\left(\boldsymbol{\nabla}^2 e^{\xi(\mathbf{r}_\parallel,t)\partial/\partial z} - e^{\xi(\mathbf{r}_\parallel,t)\partial/\partial z}\boldsymbol{\nabla}^2\right)\\ &= \frac{2\hat{p}_\parallel\hat{p}_q+\hat{p}_q^2}{2m}\xi(\mathbf{r}_\parallel,t)\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\left(\hat{p}_\parallel+\hat{p}_q\right)^2-\hat{p}_\parallel^2}{2m}\xi(\mathbf{r}_\parallel,t)\frac{\partial}{\partial z},\end{aligned} \tag{B.5}$$

где $\hat{p}_\parallel = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}_\parallel$ и $\hat{p}_q = \hbar q$ – это операторы импульса нейтрона и риплона соответственно. Временная зависимость $\xi(\mathbf{r}_\parallel,t)$ даёт дополнительный член в правой части уравнения (B.3):

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{T}_z\tilde{\psi}(\mathbf{r},t)\right) &= i\hbar\frac{\hat{T}_z\partial\tilde{\psi}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + i\hbar\frac{\partial\hat{T}_z}{\partial t}\tilde{\psi}(\mathbf{r},t)\\ &= i\hbar\frac{\hat{T}_z\partial\tilde{\psi}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \hbar\omega_q\xi(\mathbf{r}_\parallel,t)\frac{\partial}{\partial z}\hat{T}_z\tilde{\psi}(\mathbf{r},t)\,.\end{aligned} \tag{B.6}$$

Объединяя уравнения (B.3) и (B.6) мы получим новое уравнение Шредингера

$$\hat{T}_z\left\{\hat{H}_0 + \hat{H}_{\rm int} - i\hbar\partial/\partial t\right\}\tilde{\psi}(\mathbf{r},t) = 0, \tag{B.7}$$

где $\hat{H}_0$ даётся уравнением (5.4), а гамильтониан взаимодействия даётся формулой

$$\hat{H}_{\rm int} = \xi(\mathbf{r}_\parallel,t)\left\{\left[\frac{2\hat{p}_\parallel\hat{p}_q+\hat{p}_q^2}{2m} - \hbar\omega_q\right]\frac{\partial}{\partial z} + mg\right\}. \tag{B.8}$$

Приложение C

Кроссовер между адиабатическим и диабатическим пределами в классической физике

Для классической частицы над поверхностью в пределе $V_0 \to \infty$ кроссовер между диабатическим и адиабатическим пределами происходит, когда максимальное ускорение поверхности гелия $\partial^2 \xi_q / \partial t^2 = \omega_q^2 \xi_q$ из-за его колебательного движения становится равным ускорению свободного падения g,

$$\omega_{qc}^2 \xi_q = g. \tag{C.1}$$

Классическая амплитуда ξ_q поверхностных колебаний с волновым вектором $\mathbf{q}$ отличается от ξ_{0q} в уравнении (5.34) на квадратный корень из функции распределения Бозе N_q даваемой уравнением (5.48):[66]

$$\xi_q = \sqrt{N_q}\xi_{0q} \approx \xi_{0q}\sqrt{k_{\mathrm{B}}T/\hbar\omega_q}. \tag{C.2}$$

К тому же, ξ_{0q} в уравнении (5.34) зависит от площади поверхности S, которая должна быть определена. В формуле для скорости расссеяния нейтрона на риплонах эта зависимость от площади поверхности не имеет физического смысла и не появляется, так как зависимость от площади поверхности в амплитуде риплона в уравнении (5.34) компенсируется зависимостью от площади поверхности плотности состояний риплонов (что мы увидим ниже). Точно также, полный квадрат амплитуды тепловых колебаний поверхности в любой точке $r_\parallel$ даётся суммой по всем $\mathbf{q}$-векторам:

$$\left\langle \xi^2 \left(r_\parallel \right) \right\rangle = \sum_{\mathbf{q}} \xi_{\mathbf{q}}^2 = \int N_q \xi_{0\mathbf{q}}^2 \frac{S d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2},$$

и площадь поверхности S выпадает. Обобщая, если мы интересуемся поверхностными волнами с волновым числом q в некотором интервале $\Delta q_x \Delta q_y$, затем мы суммируем все риплонные моды в фазовом обьёме $S\Delta q_x \Delta q_y$, и площадь поверхности S снова выпадает из полного квадрата амплитуды $\langle \xi^2 \rangle$. В оценке (C.1) для кроссовера между диабатическим и адиабатическим состояниями поверхность S определяется через область S_n волновой функции нейтрона вдоль поверхности, которая связана с размыванием импульса $\Delta q_x \Delta q_y \sim S_\mathrm{n}^{-1}$.

Для оценки снизу $\omega_{q\mathrm{c}}$, что приводит к верхней оценке скорости рассеяния риплонов, мы берем минимально возможное S даваемое квадратом длины волны: $S_\mathrm{min} \approx (2\pi/q)^2$. Тогда, подставляя в уравнение (5.34) получаем

$$\xi_{0q}^\mathrm{max} \approx \left(\frac{\hbar q^2}{8\pi^2 \sqrt{\rho\alpha q}} \right)^{1/2} = \frac{q^{3/4}}{2\pi} \left(\frac{\hbar/2}{\sqrt{\rho\alpha}} \right)^{1/2}. \tag{C.3}$$

Для $q = 1\ \mu\mathrm{m}^{-1} = 10^4\ \mathrm{cm}^{-1}$ эта формула дает $\xi_{0q}^\mathrm{max} \approx 0.0007$ Å, что гораздо меньше, чем q^{-1}. Соответствующая

$$\xi_q^\mathrm{max} \approx \xi_{0q}^\mathrm{max} \sqrt{\frac{k_\mathrm{B}T}{\hbar\omega_q}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_\mathrm{B}T}{2\alpha} \right)^{1/2} \approx 0.2\ \text{Å} \sqrt{T\,[\mathrm{K}]} \tag{C.4}$$

также гораздо меньше чем q^{-1}, и мы можем использовать описание обыкновенной поверхностной волны. Подставляя $S_\mathrm{min} \approx (2\pi/q)^2$ в уравнения (5.34), (C.1) и (5.48) получаем

$$g = \omega_{q\mathrm{c}}^{3/2} \left(\frac{k_\mathrm{B}T\, q^{3/2}}{2\,(2\pi)^2 \sqrt{\rho\alpha}} \right)^{1/2},$$

что после использования уравнения (5.33) даёт нижнюю оценку для частоты кроссовера

$$\omega_{q\mathrm{c}} = \sqrt{2\pi g \sqrt{\frac{2\,\alpha}{k_\mathrm{B}T}}} \approx \frac{6.6 \times 10^5\ \mathrm{s}^{-1}}{(T\,[\mathrm{K}])^{1/4}}. \tag{C.5}$$

Эта частота соответствует энергии нейтронов (при $T = 1$ K) $\hbar\omega_{q\mathrm{c}} \approx 7 \times 10^{-22}$ erg ≈ 0.44 neV $> E_0$ и

$$q_\mathrm{c} = 0.56\ \mu\mathrm{m}^{-1} > \varkappa. \tag{C.6}$$

Следовательно, в диабатическом пределе $q > q_\mathrm{c}$ мы можем всегда использовать закон дисперсии риплонов в уравнении (5.33).

Еще одним условием классического адиабатического предела является то, что кривизна поверхности $\nabla^2 \xi = q^2 \xi_q^\mathrm{max}$ меньше, чем кривизна траектории нейтронов за счет

движения по параболе в свободном падении $\partial^2 z/\partial r_\parallel^2 = g/v_\parallel^2$, где $v_\parallel$ это скорость нейтрона вдоль поверхности. Принятая нами кинетическая энергия ультрахолодных нейтронов $K_\parallel = 100$ neV, соответствующая $v_\parallel^2 = 2K_\parallel/m = 19\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$, и мы можем проверить, что условие $q^2\xi_q^{\max} < g/v_\parallel^2$ выполняется при $q = q_\mathrm{c} = 0.56\ \mu\mathrm{m}^{-1}$. Следовательно, условие $\omega_q < \omega_{q\mathrm{c}}$ даваемое уравнением (C.5) обеспечивает классический адиабатической предел.

Однако приведенные выше оценки для классически адиабатического предела не работают для квантовой частицы, где условием адиабатичности является не отсутствие отражения от поверхности (которое для наклонной поверхности приводит к перемешиванию импульса нейтрона вдоль и перпендикулярно поверхности), а сохранения квантового числа для движения нейтрона перпендикулярно поверхности. Это различие видно уже из того, что получившиеся границы $\omega_{q\mathrm{c}}$ адиабатического движения нейтронов в классической и квантовой физике сильно отличаются.

Приложение D

Расчеты для скорости рассеяния нейтронов на риплонах

В этом разделе мы оцениваем интеграл в уравнении (5.51) или (5.52), этот интеграл дает скорость рассеяния нейтронов на риплонах. Интегрирование по p_q и по n в уравнении (5.51) может быть разделено на несколько областей, определяемых различными пределами отношения $p_q/p_\parallel$ и знаком $\Delta E_n - V_0$. При изменении вертикальной энергии нейтрона $\Delta E_n < V_0$ его конечные вертикальные состояния лежат в области дискретного энергетического спектра, приблизительно определяемого уравнением (5.11). При $\Delta E_n > V_0$ конечные вертикальные квантовые состояния нейтронов лежат в области непрерывного энергетического спектра и, приблизительно, могут быть описаны плоской волной.

В области $p_q \gg p_\parallel$ начальной кинетической энергией можно принебречь, и для большинства случаев рассеяния, изменение части кинетической энергии нейтрона связанной с вертикальным движением $\Delta E_n > V_0$. В этом пределе интеграл в уравнении (5.51) оценивается в приложении C1 ниже.

В области малого импульса риплона $p_q \lesssim p_\parallel$, рассматриваемой в приложении C2, угол ϕ между начальными импульсами нейтрона и риплона важен для передачи энергии в вертикальном направлении ΔE_n, и скорость рассеяния зависит от начального импульса нейтрона $p_\parallel$. В зависимости от знака разности $\Delta E_n - V_0$, эта область делится на две. При $\Delta E_n < V_0$ конечное состояние нейтронов лежит в области дискретного спектра и описывается формулами из второй главы. При $\Delta E_n > V_0$ конечное вертикальное состояние нейтронов принадлежит непрерывному спектру и может быть аппроксимировано уравнениями (D.2) и (D.3).

D.1 Поглощение тепловых (высокоэнергетических) риплонов

В этом пункте мы рассмотрим область больших импульсов $p_q \gg p_\parallel = \sqrt{2Km}$ в интеграле в уравнении (5.51). Кинетическая энергия движения в горизонтальных направлениях K ультрахолодных нейтронов, как правило меньше чем $K_* = 100$ neV, что соответствует максимальному начальному волновому числу нейтрона $q_* = p_{\parallel *}/\hbar = 7 \times 10^5$ cm$^{-1} = 0.07$ nm^{-1} и максимальной скорости нейтронов $v_{\parallel *} = \sqrt{2K/m} = 4.4$ м/с. При $q = q_*$ энергия риплонов, даваемая уравнением (5.33),

$$\hbar\omega_{q*} \equiv \hbar\omega_q \left(\hbar q = p_{\parallel *}\right) \approx 600 \text{ neV} \approx 7 \text{ mK} \gg V_0, K_*, \tag{D.1}$$

и скорость риплонов $v_{q*} = 3\omega_{q*}/2q_* = 20$ m/s [67]. Если риплон с такой высокой энергией поглощается, конечная энергия нейтронов в вертикальном направлении $E_n \sim \hbar\omega_q$ значительно выше чем потенциальный барьер $V_0 = 18.5$ neV и даже, чем гравитационный потенциал на масштабах экспериментальной камеры. Тогда окончательная волновая функция нейтронов в вертикальном направлении близка к плоской волне:

$$\psi_{\perp n}(z) \approx \exp\left(ip'_z z/\hbar\right)/\sqrt{L_z}, \tag{D.2}$$

и энергия нейтрона в вертикальном направлении может быть аппроксимирована квадратичным законом дисперсии (как для свободной частицы)

$$E_n \approx p'^2_z/2m, \tag{D.3}$$

где p'_z – это вертикальная компонента конечного импульса нейтрона. Суммирование по вертикальному волновому числу нейтрона n в уравнении (5.51) переходит в интегрирование по p'_z:

$$\sum_n \to \int \rho_n(p'_z)\, dp'_z, \tag{D.4}$$

где одномерная плотность нейтронов даётся уравнением [111]

$$\rho_n(p'_z) \approx L_z/2\pi\hbar. \tag{D.5}$$

Для рассеяния на тепловых риплонах с $q > q_*$ начальной энергией нейтрона $K \approx p_\parallel^2/2m$ и импульсом нейтрона $p_\parallel < p_q$ можно принебречь. Уравнения (5.49) и (5.50) упрощаются до

$$\varepsilon \approx \hbar\omega_q;\ \varepsilon' \approx \left(p_q^2 + p'^2_z\right)/2m, \tag{D.6}$$

и, подставляя (4.6), мы перепишем уравнение (5.51) как (нижний индекс ">"означает большую энергию риплона)

$$\begin{aligned} w_{>} &= \int_{\hbar q_*}^{\infty} \frac{\hbar \left|\psi_{\perp 0}\left(0\right) V_0\right|^2}{2\sqrt{\rho\alpha q}} \frac{N_q p_q dp_q}{2\pi\hbar^2} \int_0^{\infty} \frac{dp'_z}{\hbar^2} \delta\left(\hbar\omega_q - \frac{p_q^2 + p_z'^2}{2m}\right) \\ &= \int_{q_*}^{\infty} \frac{\left|\psi_{\perp 0}\left(0\right) V_0\right|^2}{2\pi\hbar\sqrt{\rho\alpha}} \frac{mN_q\sqrt{q}dq}{\sqrt{2m\hbar\omega_q - \hbar^2 q^2}}. \end{aligned} \tag{D.7}$$

Квадратный корень в знаменателе является действительным числом при $2m\hbar\omega_q = 2m\hbar\sqrt{\alpha/\rho}q^{3/2} > \hbar^2 q^2$, что даёт $q < 4q_0 \equiv \left(2m/\hbar\right)^2 \alpha/\rho \approx 2.5\ \mathrm{nm}^{-1}$ и соответствует энергии риплона $\hbar\omega_q < \hbar\omega_{q\,\max} \approx \hbar\left(2m/\hbar\right)^3 \left(\alpha/\rho\right)^2 = 2\times 10^{-16}\ \mathrm{erg} = 1.25\times 10^{-4}\ \mathrm{eV} \approx k_\mathrm{B}\times 1.5\ \mathrm{K} \gtrsim k_\mathrm{B}T$. Выше этой энергии простое поглощение риплона поверхностным ультрахолодным нейтроном невозможно из-за закона сохранения энергии-импульса. Подставляя уравнения (5.33) и (5.48) в уравнение (D.7) и вводя безразмерную переменную $\zeta \equiv \hbar\omega_q/k_\mathrm{B}T = \hbar\sqrt{\alpha/\rho}q^{3/2}/k_\mathrm{B}T$, для которой $q = \left(\zeta k_\mathrm{B}T\sqrt{\rho/\alpha}/\hbar\right)^{2/3}$, получим

$$w_{>} = \frac{\left|\psi_{\perp 0}\left(0\right) V_0\right|^2 \sqrt{mk_B T}}{3\pi\hbar^2\alpha\sqrt{2}} \int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \frac{\zeta^{-1/2} d\zeta \ \left(e^{\zeta}-1\right)^{-1}}{\sqrt{1-\left(\zeta/\zeta_{\max}\right)^{1/3}}}, \tag{D.8}$$

где $\zeta_{\min} = \hbar\omega_{q*}/k_\mathrm{B}T$ даётся уравнением (D.1) и $\zeta_{\max} = \hbar\omega_{q\,\max}/k_\mathrm{B}T = \left(2m\right)^3 \left(\alpha/\hbar\rho\right)^2/k_\mathrm{B}T \sim 1$. Интеграл в уравнении (D.8) расходится как $\zeta_{\min}^{-1/2}$ на нижнем пределе, и основная часть интеграла приходится на эту расходимость:

$$w_{>} \approx \frac{\left|\psi_{\perp 0}\left(0\right) V_0\right|^2 \sqrt{mk_\mathrm{B}T}}{3\pi\hbar^2\alpha\sqrt{2}\sqrt{\zeta_{\min}}}. \tag{D.9}$$

Подставляя обрезку $\zeta_{\min} = \hbar\omega_{q*}/k_\mathrm{B}T$, даваемую уравнением (D.1), и другие числовые значения в уравнение (D.9), получаем вклад в скорость рассеяния нейтрона на высокоэнергетических риплонах с $\hbar q > p_{\parallel *}$:

$$w_{>} \approx 1.7\times 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1} \times T\,[\mathrm{K}]\,. \tag{D.10}$$

При меньшей энергии риплона, то есть при $\hbar q < p_{\parallel *}$, интеграл в уравнении (5.51) должен быть оценен без приближений в уравнениях (D.2)-(D.6). В следующем параграфе мы покажем что уравнение (D.9) завышает оценку интеграла в уравнениии (5.51) при $\hbar q < p_\parallel$, особенно при $\hbar\omega_q \lesssim V_0$ где инфракрасная расходимость исчезает.

При $K_* \to 0$, когда обрезка даваемая как $q_* = \hbar/p_{\parallel *}$ слишком мала, инфракрасная расходимость в уравнении (D.9) должна быть обрезана на $\zeta_{\min} \approx V_0/k_\mathrm{B}T$, потому что

приближение, заданное уравнениями (D.2)-(D.5), не верно при более низких энергиях риплонов, так как состояние нейтрона после поглощения риплона по-прежнему принадлежит дискретному спектру вдоль оси z. Грубая оценка скорости поглощения высокоэнергетических риплонов с $\hbar\omega_q > V_0$, которая может быть получена при малых начальных энергиях нейтронов $K < V_0$ подстановкой $\zeta_{\min} \approx V_0/k_{\mathrm{B}}T$ в уравнение (D.9), даёт

$$w_{>}^{\mathrm{up}} \approx w_{>}\left(\zeta_{\min} \approx V_0/k_{\mathrm{B}}T\right) \approx 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1} \times T\,[\mathrm{K}]\,. \tag{D.11}$$

Эта оценка дает среднее время рассеяния нейтронов $1/w_{>}^{\mathrm{up}} \approx 27$ часа, которое намного больше, чем среднее время жизни нейтрона.

D.2 Верхняя оценка скорости поглощения низкоэнергетических риплонов

При $k_{\mathrm{B}}T \gg \hbar\omega_q$ числа заполнения $N_q \approx k_{\mathrm{B}}T/\hbar\omega_q$, и подставляя уравнения (5.33) и (5.34) в уравнение (5.52) получаем

$$w_{<} = \int_0^{p_{\max}} \frac{k_{\mathrm{B}}T dp_q^2}{4\,\pi\hbar\alpha p_q^2} \sum_n \frac{\left|\psi_{\perp 0}\left(0\right)\psi_{\perp n}^{*}\left(0\right)V_0\right|^2}{\sqrt{a^2-\left(b-E_n\right)^2}}. \tag{D.12}$$

D.2.1 Переходы в непрерывный спектр нейтронов

В этом пункте мы рассмотрим $E_n > V_0$, когда конечная энергия нейтронов выше потенциального барьера V_0 и принадлежит непрерывному спектру. Тогда мы можем применить приближение в уравнениях (D.2)-(D.5) и переписать уравнение (D.12) как

$$w_{<} \approx \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{k_{\mathrm{B}}T dp_q^2}{4\pi\hbar\alpha p_q^2} \frac{\left|\psi_{\perp 0}\left(0\right)V_0\right|^2}{2\pi\hbar} I, \tag{D.13}$$

где интеграл

$$I \equiv \int \frac{dp_z'}{\sqrt{a^2-\left(b-p_z'^2/2m\right)^2}} = \int_{V_0}^{a+b} \frac{\sqrt{m/2E_n}dE_n}{\sqrt{a^2-\left(b-E_n\right)^2}}. \tag{D.14}$$

При $b > a$ мы можем получить верхнюю оценку этого интеграла:

$$I < I_{\max} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2V_0}} \int_{b-a}^{b+a} \frac{dE_n}{\sqrt{a^2-\left(b-E_n\right)^2}} = \frac{\pi\sqrt{m}}{\sqrt{2V_0}}. \tag{D.15}$$

Тогда верхняя оценка уравнения (D.13)

$$w_{<}^{\mathrm{up}} \approx \frac{k_{\mathrm{B}}T\left|\psi_{\perp 0}\left(0\right)V_0\right|^2\sqrt{m}}{4\pi\hbar^2\alpha\sqrt{2V_0}}\ln\left(\frac{p_{\max}}{p_{\min}}\right). \tag{D.16}$$

Интервал интегрирования $V_0 \leq E_n \leq b+a$ в уравнении (D.14) отличен от нуля, когда величина $b+a \approx \hbar\omega_q + p_{\parallel}p_q/m > V_0$, что для $p_{\parallel}^2/2m = 100$ neV соответствует $q > q_{\min} \equiv p_{\min}/\hbar \approx 4\times 10^4$ cm^{-1}. Подставляя также $\psi_{\perp 0}\left(0\right) \approx 0.236$ cm$^{-1/2}$ и $p_{\max} = p_{\parallel *}$ в уравнение (D.16) получаем

$$w_{<}^{\mathrm{up}} \approx 7.3\times 10^{-6}\ln\left(q_*/q_{\min}\right)\times T\,[\mathrm{K}] \approx 2\times 10^{-5}\times T\,[\mathrm{K}]\,. \tag{D.17}$$

D.2.2 Переходы нейтронов на дискретные уровни

В этом пункте мы рассмотрим интервал $0 < \Delta E_n \lesssim V_0$, где энергия E_n конечного состояния нейтрона лежит ниже отенциального барьера V_0 и приблизительно даётся уравнениями (5.11) и (5.12). Поскольку $V_0 \gg E_0$, суммирование по n в уравнении (D.12) все еще включает в себя множество членов и может быть аппроксимировано интегрированием по n для $n \gg 1$. Уравнения (5.11) и (5.12)дают $E_n \approx mgz_0\left(3\pi n/2\right)^{2/3}$, что переписывается как

$$n \approx \frac{2}{3\pi}\left(\frac{\Delta E_n}{mgz_0}\right)^{3/2} = \frac{2\left(\Delta E_n\right)^{3/2}}{3\pi g\hbar}\sqrt{\frac{2}{m}}$$

и даёт

$$\frac{dn}{dE_n} = \frac{\sqrt{E_n}}{\pi g\hbar}\sqrt{\frac{2}{m}}. \tag{D.18}$$

Мы также используем, что $\left|\psi_{\perp n}^*\left(0\right)\right| \lesssim \psi_{\perp 0}\left(0\right)$, и для верхней оценки уравнения (D.12) мы заменяем $\left|\psi_{\perp n}^*\left(0\right)\right|$ на $\left|\psi_{\perp 0}\left(0\right)\right|$ в интервале $E_n < V_0$. Используя уравнение (D.18), мы перепишем уравнение (D.12) при $\Delta E_n < V_0$ как

$$w_{\ll} \approx \int_0^{p_{\max}} \frac{k_{\mathrm{B}}Tdp_q}{\pi\hbar^2\alpha p_q}\frac{\left|\psi_{\perp 0}^2\left(0\right)V_0\right|^2}{\pi g\sqrt{2m}}\int_0^{V_0}\frac{\sqrt{E_n}dE_n}{\sqrt{a^2-\left(b-E_n\right)^2}}. \tag{D.19}$$

Этот интеграл сходится и основная часть его приходится на $E_n \sim V_0$. Верхняя оценка $w_{\ll}^{\mathrm{up}}$ этого интеграла может быть получена путем замены $\sqrt{E_n}$ на $\sqrt{V_0}$ под знаком интеграла и путем расширения области интегрирования от $(0, V_0)$ к $(a-b, a+b)$. Это даёт интеграл по E_n, аналогичный уравнению (D.15):

$$\begin{aligned} w_{\ll}^{\mathrm{up}} &= \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{k_{\mathrm{B}}Tdp_q}{\pi\hbar^2\alpha p_q}\frac{\left|\psi_{\perp 0}^2\left(0\right)V_0\right|^2\sqrt{V_0}}{\pi g\sqrt{2m}}\int_{b-a}^{b+a}\frac{dE_n}{\sqrt{a^2-\left(b-E_n\right)^2}} \\ &= \frac{k_BT\left|\psi_{\perp 0}^2\left(0\right)V_0\right|^2\sqrt{V_0}}{\pi\hbar^2\alpha g\sqrt{2m}}\ln\left(\frac{p_{\max V0}}{p_{\min V0}}\right). \end{aligned} \tag{D.20}$$

Поскольку $V_0 > E_n$ и подынтегральное выражение в уравнении (D.19) действительно при $b-a < E_n < b+a$, область интегрирования по E_n в уравнении (D.19) отлична от нуля, если $b - a \approx \hbar\omega_q - p_\parallel p_q/m < V_0$, что для $p_\parallel^2/2m = 100$ neV соответствует $p_q < p_{\max} \approx \hbar q_{\max V0}$ с $q_{\max V0} = 1.57 \times 10^5$ cm^{-1}. С другой стороны, $\Delta E_n < b + a$ может достигать V_0 если $b + a \approx \hbar\omega_q + p_\parallel p_q/m \geq V_0$. Для $p_\parallel^2/2m = 100$ neV это даёт $p_q > p_{\min V0} \approx \hbar q_{\min V0}$ с $q_{\min V0} = 3.8 \times 10^4$ cm^{-1}. Для $p_q < p_{\min V0}$ логарифмическая расходимость исчезает. Теперь из уравнения (D.20) получим верхнюю оценку $w_\ll$:

$$w_\ll^{\text{up}} \approx 4 \times 10^{-5} \times T\,[\text{K}]\ \text{s}^{-1}. \tag{D.21}$$

Приложение E

Рассеяние нейтронов на сюрфонах

E.1 Матричный элемент

Сюрфон, являясь атомом ^{4}He на поверхностом энергетическом уровне [15, 64], взаимодействует с нейтроном через потенциал, приведеный в уравнении (5.1). Матричные элементы нейтрон-гелиевого взаимодействия в уравнениях (5.19),(5.24) предполагают, что волновая функция гелия является плоской волной также вдоль оси z, что неверно для сюрфонов. Следовательно, что мы и делаем в этом пункте приложения, нам нужно сначала получить матричный элемент нейтрон-сюрфонного взаимодействия, подобно тому как мы получали матричные элементы при взаимодействии нейтронов с атомами пара.

Волновая функция сюрфона даётся произведением $\Psi = \Psi_\perp(z)\,\Psi_\parallel\left(\mathbf{r}_\parallel\right)$. Горизонтальная часть волновой функции сюрфона является плоской волной: $\Psi_\parallel\left(\mathbf{r}_\parallel\right) = \exp\left(i\mathbf{P}_\parallel\,\mathbf{r}_\parallel/\hbar\right)$. Вертикальная часть волновой функции сюфона $\Psi_\perp(z)$ анализировалась выше и в работах [65, 64, 90] (см. главу 4 и рис. 4.3), где было показано что сюрфон локализован над поверхностью на высоте ~ 4 Å $\ll z_0$ [113]. Следовательно, для нашего расчета можно взять $\Psi_\perp^2(z) \approx \delta(z)$. Начальная и конечная волновые функции сюрфона различаются между собой только начальным и конечным импульсом, $\mathbf{P}_\parallel$ и $\mathbf{P}'_\parallel$, соответственно. С другой стороны, вертикальная компонента волновой функции нейтрона сильно меняется при рассеянии нейтрона на сюрфоне, и для большинства событий нейтрон оказывается выведен из дискретного спектра в непрерывный. Следовательно, конечная волновая функция нейтрона даётся уравнением (5.18). Матричный элемент потенциала взаимодействия (5.1)

тогда даётся выражением

$$\begin{aligned} T_{\text{if}} &= U \int d^3\mathbf{r}\, \psi_{\perp 0}(z)\, \psi_{\parallel}\left(\mathbf{r}_{||}\right) \psi'(\mathbf{r}) \times \\ &\int d^3\mathbf{R} \psi \Psi_{\perp}^2(z) \exp\left[\frac{i\left(\mathbf{P}_{\parallel} - \mathbf{P}'_{\parallel}\right)\mathbf{R}_{\parallel}}{\hbar}\right] \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \\ &\approx U\psi_{\perp 0}(0)\left(2\pi\hbar\right)^2 \delta^{(2)}\left(\Delta\mathbf{P}_{\text{tot}||}\right)/\sqrt{SV}, \end{aligned} \tag{E.1}$$

где $\Delta\mathbf{P}_{\text{tot}} \approx \mathbf{P} - \mathbf{P}' - \mathbf{p}'$ – это изменение полного импульса сюрфона, и $\mathbf{R}$ – это координата сюрфона. В дальнейшем нам понадобится только квадрат модуля матричного элемента T_{if}. Квадрат δ-функции в $|T_{\text{if}}|^2$ можно преобразовать с помощью уравнения (5.23). Тогда вместо уравнения (5.24) мы получаем

$$|T_{\text{if}}|^2 = U^2\psi_{\perp 0}^2(0)\left(2\pi\hbar\right)^2 \delta^{(2)}\left(\Delta\mathbf{P}_{\text{tot}||}\right)/V. \tag{E.2}$$

E.2 Скорость рассеяния на сюрфоне

Скорость рассеяния нейтрона на сюрфоне с начальным импульсом $\mathbf{P}_{\parallel}$ дается квадратом матричного элемента (5.24), проинтегрированным по конечным импульсам $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{P}'_{\parallel}$ нейтрона и сюрфона соответственно (золотое правило Ферми [39]):

$$w_{\mathbf{p}} = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{d^2\mathbf{P}'_{\parallel}}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{V d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} |T_{\text{if}}|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon'). \tag{E.3}$$

Здесь $\varepsilon \approx P_{\parallel}^2/2M$ и $\varepsilon' = P_{\parallel}'^2/2M + p'^2/2m$ – это сумма начальных энергий нейтрона и сюрфона и сумма конечных энергий нейтрона и сюрфона, соответственно. Теперь подставим выражение для матричного элемента (E.2) в уравнение золотого правила Ферми (E.3). Интегрирование по $\mathbf{p}'_{\parallel}$ сокращает $\delta^{(2)}\left(\Delta\mathbf{P}_{\text{tot}||}\right)$ в матричном элементе в уравнении (E.2), где $\Delta\mathbf{P}_{\text{tot}||} \approx \mathbf{P}_{\parallel} - \mathbf{P}'_{\parallel} - \mathbf{p}'$, и, переходя к полярным координатам, получаем:

$$w_{\mathbf{p}} = \frac{U^2\left|\psi_{\perp 0}^2(0)\right|}{\hbar^3} \int \frac{P'_{\parallel} dP'_{\parallel}}{2\pi} \frac{dp'_{\perp}}{2\pi\hbar} \int d\phi\, \delta(\varepsilon - \varepsilon'). \tag{E.4}$$

Подставляя ε и ε', и интегрируя по углу ϕ между $\mathbf{P}_{\parallel}$ и $\mathbf{P}'_{\parallel}$, получим

$$\begin{aligned} w_{\mathbf{p}} = \frac{U^2}{\hbar^3}\left|\psi_{\perp 0}^2(0)\right| \int \frac{P'_{\parallel} dP'_{\parallel}}{2\pi} \frac{dp'_{\perp}}{2\pi\hbar} \times \\ \left[\left(\frac{P'_{\parallel} P_{\parallel}}{m}\right)^2 - \left(\frac{P_{\parallel}^2}{2M} - \frac{P_{\parallel}'^2}{2M} - \frac{P_{\parallel}^2 + P_{\parallel}'^2 + p_{\perp}'^2}{2m}\right)^2\right]^{-1/2}. \end{aligned} \tag{E.5}$$

Теперь используем $M = 4m$ для упрощения выражения:

$$w_{\mathbf{p}} = \int \frac{\left(U^2 m \left|\psi^2_{\perp 0}(0)\right| / 4\pi^2\hbar^4\right) \quad P'_{\parallel} dP'_{\parallel} dp'_{\perp}}{\sqrt{P'^2_{\parallel} P^2_{\parallel} - \left[P^2_{\parallel}/8 - P'^2_{\parallel}/8 - \left(P^2_{\parallel} + P'^2_{\parallel} + p'^2_{\perp}\right)/2\right]^2}}.$$

Вводя новые безразмерные переменные $x_p \equiv P'^2_{\parallel}/P^2_{\parallel}$ и $y_p \equiv p'_{\perp}/P_{\parallel}$, перепишем это выражение как

$$w_{\mathbf{p}} = \frac{U^2 m P_{\parallel}}{\pi^2\hbar^4} \int \frac{\left|\psi^2_{\perp 0}(0)\right| \; dx_p \; dy_p}{\sqrt{64x_p - \left(3 + 5x_p + 4y_p^2\right)^2}}. \tag{E.6}$$

Это может быть дополнительно преобразовано в

$$w_{\mathbf{p}} = \frac{U^2 m P_{\parallel}}{\pi^2\hbar^4} \int \frac{\left|\psi^2_{\perp 0}(0)\right| dx_p \; dy_p}{\sqrt{\left(y_p^2 - b_1\right)\left(b_2 - y_p^2\right)}} \tag{E.7}$$

$$= \frac{U^2 m P_{\parallel}}{\pi^2\hbar^4} \int \frac{\left|\psi^2_{\perp 0}(0)\right| dx_p \; dy_p}{5\sqrt{\left(x_p - a_1\right)\left(a_2 - x_p\right)}}, \tag{E.8}$$

где решения квадратного уравнения

$$b_{1,2} = \frac{-3 \mp 8\sqrt{x_p} - 5x_p}{4}, \tag{E.9}$$

и

$$a_{1,2} = \frac{17 \mp 8\sqrt{1 - 20y_p^2} - 20y_p^2}{25}. \tag{E.10}$$

Интеграл по x_p в уравнении (E.8) даёт π для любых $a_2 > a_1$, однако, подынтегральная часть реальна только при некоторых значениях y_p^2. Максимальное значение b_2 в уравнении (E.9) это $b_2^{\max} = 0.2$ при $x_p = 16/25$. Поскольку $0 < y_p^2 < b_2^{\max}$, для верхней оценки интеграла в уравнении (E.6) можно взять

$$w^{\mathrm{up}}_{\mathbf{p}} = \frac{U^2 m P_{\parallel}}{\pi^2\hbar^4} \int \frac{\left|\psi^2_{\perp 0}(0)\right| \; dx_p \; 2\sqrt{b_2^{\max}}}{5\sqrt{\left(x_p - a_1\right)\left(a_2 - x_p\right)}}$$

$$= \frac{U^2 m P_{\parallel}}{\pi^2\hbar^4} \left|\psi^2_{\perp 0}(0)\right| \frac{2\pi\sqrt{0.2}}{5}. \tag{E.11}$$

Общая скорость рассеяния дается интегралом по всем начальным состояниям сюрфона с соответствующими числами заполнения:

$$\frac{w^{\mathrm{up}}_{\mathrm{sur}}}{\left|\psi^2_{\perp 0}(0)\right|} = \int \frac{d^2\mathbf{P}_{\parallel}}{(2\pi\hbar)^2} w^{\mathrm{up}}_{\mathbf{p}} \exp\left(\frac{-\Delta_{\mathrm{s}0} - \mathbf{P}^2_{\parallel}/2M}{k_{\mathrm{B}}T}\right).$$

Подставляя уравнение (E.11) и выполняя интегрирование, получим

$$\frac{w^{\mathrm{up}}_{\mathrm{sur}}}{\left|\psi^2_{\perp 0}(0)\right|} = \frac{U^2 m\sqrt{1.6\pi}}{20\pi^2\hbar^6} \exp\left(\frac{-\Delta_{\mathrm{s}0}}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \left(M k_{\mathrm{B}} T\right)^{3/2}.$$

Подставляя U из уравнения (5.1), получим скорость рассеяния, даваемую уравнением (5.63), которая оказывается пренебрежимо малой.

Литература

[1] В.Б. Шикин, Ю.П. Монарха. "Двумерные заряженные системы в гелии М., Наука (1989).

[2] V.S. Edel'man, Sov. Phys. - Uspehi **130**, 676 (1980).

[3] Y. Monarkha, K. Kono, *Two-Dimensional Coulomb Liquids and Solids*, Springer Verlag, 2004.

[4] P.M. Platzman, M.I. Dykman, Science **284**, 1967 (1999).

[5] M. I. Dykman, P. M. Platzman, and P. Seddighrad, Phys. Rev. B **67**, 155402 (2003)

[6] L. F. Santos, M. I. Dykman, M. Shapiro, F. M. Izrailev, Phys. Rev. A **71**, 012317 (2005).

[7] S. A. Lyon, Phys. Rev. A **74**, 052338 (2006).

[8] D. I. Schuster, A. Fragner, M. I. Dykman, S. A. Lyon, and R. J. Schoelkopf Phys. Rev. Lett. **105**, 040503 (2010).

[9] F. R. Bradbury, Maika Takita, T. M. Gurrieri, K. J. Wilkel, Kevin Eng, M. S. Carroll, and S. A. Lyon Phys. Rev. Lett. 107, 266803 (2011).

[10] J.S.Rowlinson and B. Widom, *Molecular Theory of cappilarity*, Dover Publications, Mineola NY, 2002.

[11] D.O. Edwards and W.F. Saam, Chapter 4 in *The free surface of liquid helium*, Ed. by D.F. Brewer, Progress in Low Temperature Physics (series), North-Holland Publishing Company, 1978

[12] M. Iino, M. Suzuki, and A.J. Ikushima, J. Low Temp. Phys. 61, 155 (1985).

[13] M. Iino, M. Suzuki, A.J. Ikushima and Y. Okuda, J. Low Temp. Phys. 59, 291 (1985); M. Suzuki, Y. Okuda, A.J. Ikushima and M.Iino, Europhys. Lett. 5, 333 (1988); K. Matsumoto, Y. Okuda, M. Suzuki and S. Misawa, J. Low Temp. Phys. 125, 59 (2001).

[14] K. R. Atkins, Can. J. Phys. 31, 1165 (1953).

[15] A.M. Dyugaev, P.D. Grigoriev, JETP Lett. **78**, 466 (2003) [Pisma v ZhETF **78**, 935 (2003)].

[16] A.F. Andreev, JETP **23**, 939 (1966) [Zh. Exp. Teor. Fiz. **50**, 1415 (1966)].

[17] H.-J. Lauter, in *Excitations in Two-Dimensional and Three Dimensional -Quantum Fluids*, NATO ASI series, edited by A. F. G. Wyatt aud H. J. Lauter (Plenum, New York, 1991).

[18] E. Feenberg, *Theory of Quantum Fluids* (Academic, New York, 1969).

[19] G. Mahan, Many-Particle Physics, 2nd ed. (Plenum Press, New York, 1990), Ch. 10.

[20] E. Krotscheck, Phys. Rev. B **31**, 4258 (1985).

[21] E. Krotscheck, Phys. Rev. B **32**, 5713 (1985).

[22] E. Krotscheck and C. J. Tymczak, Phys. Rev. B **45**, 217 (1992).

[23] B. E. Clements, E. Krotscheck, C. J. Tymczak, J. Low Temp. Phys. **107**, 387 (1997).

[24] K. A. Gernoth and M. L. Ristig, Phys. Rev. B **45**, 2969 (1992).

[25] K.A. Gernoth, J.W. Clark, G. Senger and M.L. Ristig, Phys. Rev. B **49**, 15836 (1994).

[26] Вторая поверхностная мода, предложенная в работе [25] для достаточно толстого слоя гелия возможно связана с суперпозицией сюрфона и поверхностной фононной моды, поскольку она даёт два максимума квадрата волновой функции He, один выше и один под поверхностью.

[27] H. J. Lauter, H. Godfrin, V. L. P. Frank, and P. Leiderer, Phys. Rev. Lett. **68**, 2484 (1992).

[28] B. E. Clements, H. Godfrin, E. Krotscheck, H. J. Lauter, P. Leiderer, V. Passiouk, and C. J. Tymczak, Phys. Rev. B **53**, 12242 (1996).

[29] L. Pricaupenko and J. Treiner, J. Low Temp.Phys. **101**, 809 (1995).

[30] C.G. Paine and G.M. Seidel, Phys. Rev. B **46**, 1043 (1992).

[31] P.D. Grigoriev, A.M. Dyugaev, E.V. Lebedeva, JETP **106**(2), 316 (2008).

[32] P. D. Grigor'ev, A. M. Dyugaev and E. V. Lebedeva, JETP Letters **87**, 106 (2008) [Pisma v ZhETF **87**, 114 (2008)].

[33] П.Д. Григорьев, Письма в ЖЭТФ, **66** (9), 599, (1997).

[34] П.Д. Григорьев, А.М. Дюгаев, ЖЭТФ, 120(1), 119-126 (2001) [P.D. Grigor'ev, A.M. Dyugaev, JETP, 93(1), 103-110 (2001)].

[35] J. E. Lennard-Jones, Proc. Roy. Soc. A 106, 463 (1924).

[36] Обменная энергия сюрфона мала, поскольку мало перекрытие волновых функций атомов He из-за сильного отталкивания на малых расстояниях.

[37] P. D. Grigor'ev and A. M. Dyugaev, JETP **88**, 325 (1999) [ZhETF **115**, 593 (1999)].

[38] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Course of Theoretical Physics, Vol. 5: Statistical Physics, 3rd ed. (Nauka, Moscow, 1976; Pergamon Press, Oxford, 1980).

[39] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Course of Theoretical Physics, Vol. 3: Quantum Mechanics, 3rd ed. (Nauka, Moscow, 1976; Pergamon Press, Oxford, 1980).

[40] Russell J. Donnelly and Carlo F. Barenghi, *The Observed Properties of Liquid Helium at the Saturated Vapor Pressure,* Journal of Physical and Chemical Reference Data 27, 1217 (1998).

[41] D.S. Greywall, Phys. Rev. B 27, 2747 (1983).

[42] Stephen G. Sydoriak and Thomas R. Roberts, Phys. Rev. 106, 175 - 182 (1957); Jost Engert, Bernd Fellmuth and Karl Jousten, Metrologia **44,** 40 (2007).

[43] A.M. Dyugaev, J. Low Temp. Phys. 78, 79 (1990).

[44] A.M. Dyugaev, Sov. Sci. Rev. A. Phys. 14, 1 (1990).

[45] A. F. Andreev, JETP Lett. 28, 556 (1978) [Pisma v ZhETF **28**, 603 (1978)].

[46] V. V. Nesvizhevsky, H. G. Börner, A. K. Petukhov, H. Abele, S. Baessler, F. J. Ruess, T. Stöferle, A. Westphal, A. M. Gagarski, G. A. Petrov, and A. V. Strelkov, Nature (London) **415**, 297 (2002).

[47] V. V. Nesvizhevsky, A. K. Petukhov, H. G. Börner,T. A. Baranova, A. M. Gagarski, G. A. Petrov, K. V. Protasov, A. Y. Voronin, S. Baessler, H. Abele, A. Westphal, and L. Lucovac, Eur. Phys. J. C **40**, 479 (2005).

[48] A. Westphal, H. Abele, S. Baessler, V. Nesvizhevsky, K. Protasov, and A. Voronin, Eur. Phys. J. C **51**, 367 (2007).

[49] T. Jenke, G. Cronenberg, J. Burgdörfer, L. A. Chizhova, P. Geltenbort, A. N. Ivanov, T. Lauer, T. Lins, S. Rotter, H. Saul, U. Schmidt, and H. Abele, Phys. Rev. Lett. **112**, 151105 (2014).

[50] H. Abele, T. Jenke, H. Leeb, and J. Schmiedmayer, Phys. Rev. D 81, 065019 (2010).

[51] A. M. Dyugaev, A. S. Rozhavskii, I. D. Vagner and P. Wyder, JETP Letters **67**, 434 (1998).

[52] B. A. Nikolaenko, Yu. Z. Kovdrya, and S. P. Gladchenko, Journal of Low Temp. Phys. (Kharkov) **28**, 859 (2002)

[53] G. Papageorgiou, P. Glasson, K. Harrabi, et al., Appl. Phys. Lett. **86**, 153106 (2005).

[54] Так как химический потенциал жидкого гелия $|\mu| \gg k_B T$, распределение Больцмана практически не отличается от распределения Бозе-Эйнштейна.

[55] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Course of Theoretical Physics, Vol. 6: Hydrodynamics, 3rd ed., Pergamon Press, Oxford.

[56] Yu P. Monarkha and V. B. Shikin, "Low-dimensional electronic systems on a liquid helium surface (Review) Sov. J. Low Temp. Phys. 8, 279 (1982).

[57] Уравнение (4.6) может быть получено путем приравнивания энергии классической поверхностной волны с волновым числом q и амплитудой ξ_{0q} на площади поверхности S, даваемой, например, в книге [55], к энергии $\hbar\omega_q$ одного риплона.

[58] E. Eidelstein, D. Goberman, and A. Schiller, Phys. Rev. B **87**, 075319 (2013).

[59] R. Citro, E. Orignac, and T. Giamarchi, Phys. Rev. B **72**, 024434 (2005).

[60] Balazs Dora, Masudul Haque, and Gergely Zarand, Phys. Rev. Lett. **106**, 156406 (2011).

[61] D.A. Ivanov and M.V. Feigel'man, ZhETF **114**, 640 (1998) [JETP, **87**(2), 349 (1998)].

[62] Kazuki Koshino and Tetsuo Ogawa, Journal of the Korean Physical Society **34**, S21 (1999).

[63] R. Golub, Physics Letters A, **72**, 387 (1979).

[64] A.D. Grigoriev, P.D. Grigoriev, A.M. Dyugaev, J. Low Temp. Phys. **163**, 131 (2011).

[65] A.D. Grigoriev, P.D. Grigoriev, A.M. Dyugaev, A.F. Krutov, Low Temp. Phys., **38**(11), 1005 (2012).

[66] Термически возбуждённые риплоны не являются когерентными, поэтому их коэффициент заселения (фактор заполнения квантовых состояний) равен N_q и увеличивает среднюю энергию поверхностных волн в N_q раз, а амплитуду тепловых риплонов только в $\sqrt{N_q}$ раз.

[67] Типичный тепловой риплон имеет еще большую энергию $\hbar\omega_q \sim k_B T \approx 0.5K$, соответствующую волновому числу $q \approx 1.2nm^{-1}$ и скорости $v_q \equiv \partial\omega_q/\partial q \approx 82\text{m/sec}$.

[68] D. Dubbers and M. G. Schmidt, Rev. Mod. Phys. **83**, 1111 (2011).

[69] M. J. Ramsey-Musolf and S. Su, Phys. Rept. **456**, 1 (2008).

[70] H. Abele, Prog. Nucl. Phys. **60**, 1 (2008).

[71] R. Golub, D. J. Richardson, S. K. Lamoreaux, *Ultra-Cold Neutrons* (Adam Hilger, Bristol 1991).

[72] V. K. Ignatovich, *The Physics of Ultracold Neutrons* (Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1990).

[73] E. M. Purcell, and N. F. Ramsey, Phys. Rev. **78**, 807 (1950).

[74] M. Pospelov and A. Ritz, Annals Phys. **318**, 119 (2005).

[75] C. A. Baker et al., Phys. Rev. Lett **97**, 131801 (2006).

[76] A. P. Serebrov, E. A. Kolomenskiy, A. N. Pirozhkov et al., JETP Lett. **99**, 4 (2014) [Pis'ma v ZhETF **99**, 7 (2014)].

[77] A. Coc, N. J. Nunes, K. A. Olive et al., Phys. Rev. D **76**, 023511 (2007).

[78] R. E. Lopez and M. S. Turner, Phys. Rev. D **59**, 103502 (1999).

[79] V. I. Luschikov, A. I. Frank, JETP Lett. **28**, 559 (1978).

[80] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, Phys. Rev. D **59**, 086004 (1999).

[81] I. Antoniadis, Lect. Notes Phys. **631**, 337 (2003).

[82] P. Brax, G. Pignol, Phys. Rev. Lett. **107**, 111301 (2011).

[83] T. Jenke, P. Geltenbort, H. Lemmel, H. Abele, Nature Phys. **7**, 468(2011).

[84] M. Kreuz, V. Nesvizhevsky, P. Schmidt-Wellenburg, T. Soldner et al., Nucl. Instr. Meth. A **611**, 326 (2009).

[85] G. Pignol, S. Baessler, V. V. Nesvizhevsky et al., Adv. High Energy Phys. **2014**, 628125 (2014).

[86] S. Baessler, V. V. Nesvizhevsky, K. V. Protasov, A. Y. Voronin, Phys. Rev. D **75**, 075006 (2007).

[87] A. P. Serebrov, O. Zimmer, P. Geltenbort et al., JETP Lett. **91**, 6 (2010).

[88] O. Zimmer, Phys. Lett. B **685**, 38 (2010).

[89] K. Durstberger-Rennhofer, T. Jenke, H. Abele, Phys. Rev. D **84**, 036004 (2011).

[90] P. D. Grigoriev, A. M. Dyugaev, E. V. Lebedeva, JETP **106**, 316 (2008) [ZhETF **133**, 370 (2008)].

[91] R. Golub and J. M. Pendlebury, Phys. Lett. **53A**, 133 (1975).

[92] R. Golub, J. Pendlebury, Phys. Lett. A **82**, 337 (1977).

[93] O. Zimmer, F.M. Piegsa, S.N. Ivanov, Phys. Rev. Lett. **107**, 134801 (2011).

[94] F.M. Piegsa, M. Fertl, S.N. Ivanov, K.K.H. Leung, M. Kreuz, P. Schmidt-Wellenburg, T. Soldner, O. Zimmer, Phys. Rev. C **90**, 015501 (2014).

[95] V. P. Alfimenkov, V. K. Ignatovich, L. P. Meshov-Deglin, V. I. Morozov, A. V. Strelkov, M. I. Pulaja, Dubna preprint P3-2009-197 (2009).

[96] P. Ch. Bokun, Sov. J. Nucl. Phys. **40** (1), 180 (1984) [Yad. Fiz. **40**, 287 (1984)].

[97] V. F. Ezhov, A. Z. Andreev, G. Ban et al., arXiv:1412.7434 (2014).

[98] D. J. Salvat, E. R. Adamek, D. Barlow et al., Phys. Rev. C **89**, 052501 (2014).

[99] K. Leung, S. Ivanov, F. Martin et al., Proceedings of the workshop "Next Generation Experiments to Measure the Neutron Lifetime", Santa Fe, New Mexico, 9 – 10 November 2012, page 145. World Scientific (2014).

[100] V. F. Ezhov, A. Z. Andreev, G. Ban et al., Nucl. Instr. Meth. A **611**, 167 (2009).

[101] K. K. H. Leung, O. Zimmer, Nucl. Instr. Meth. A **611**, 181 (2009).

[102] R. Picker, I. Altarev, J. Bröcker et al., J. Res. NIST **110**, 357 (2005).

[103] P. R. Huffman, C. R. Brome, J. S. Butterworth et al., Nature **403**, 62 (2000).

[104] O. Zimmer, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **26**, 67 (2000).

[105] F. E. Wietfeldt, G. L. Greene, Rev. Mod. Phys. **83**, 1173 (2011).

[106] S. Paul, Nucl. Instr. Meth. A **611**, 157 (2009).

[107] O. Zimmer, R. Golub, Phys. Rev. C **92**, 015501 (2015).

[108] K. P. Hickerson, B. W. Filippone, Nucl. Instr. Meth A **721**, 60 (2013).

[109] A. Steyerl, W. Drexel. S. S. Malik, E. Gutsmiedl, Physica B **151**, 36 (1988).

[110] C. Siemensen, D. Brose, L. Böhmer, P. Geltenbort, C. Plonka-Spehr, Nucl. Instr. Meth. A **778**, 26 (2015).

[111] Уравнения (D.2)-(D.4) также могут быть применены для меньших E_n если $p'_z = p'_z(z)$ понимать как квазиклассический координатно-зависимый импульс; тогда в уравнении (D.3) следует взять его значение при $z = 0$, и $\rho_n(p'_z)$ отличаются от полученых из уравнения (D.5), завися от фактического спектра.

[112] Подынтегральное выражение в уравнении (5.52) действительно при $b - a \leq \Delta E_n \leq b + a$. Величина $b > a$ при $p_{\|} < m\sqrt{\alpha q/\rho} - \hbar q/2$, что для $p_{\|}^2/2m = 100$ neV соответствует $q > p_{\|}^2 \rho / m^2 \alpha \approx 8 \times 10^4$ cm^{-1} и $\hbar\omega_q > 23$ neV.

[113] Согласно уравнению (10) из работы [65], $\psi_{\mathrm{s}\perp}(z) \approx 2\kappa_{\mathrm{s}}^{3/2}(z - z_{\mathrm{s}})\exp\left[-\kappa_{\mathrm{s}}(z - z_{\mathrm{s}})\right]$ с $\kappa_{\mathrm{s}} \approx 0.87$ Å^{-1} и $z_{\mathrm{s}} \approx 1.75$ Å (смотрите также рисунок 1 в работе [65]).